Q.（基礎問 3 例題 69(1) p124）
5 行目の (極大値)・(極小値)<0 のところで、極大値と極小値の積が 0 以下になるときはそれぞれの符号が異なるということは分かるのですが、なぜここでその考え方が使えるのかが分かりません。

A.
3 つの異なる実数解を判別する方法は下記リンクの通り実は判別式があります。
https://mathtrain.jp/sanjihanbetsu

覚えておいて損はないと思いますが、高校課程では習わないのが通常なので記述式で書くと減点される可能性があります。

3 つの異なる実数解をもつときは、極大値×極小値<0 であることを示すしか基本的に方法はありません。
これは 3 次関数であれば常に成り立ちます。