標準問題精講数学2B P60 標問25

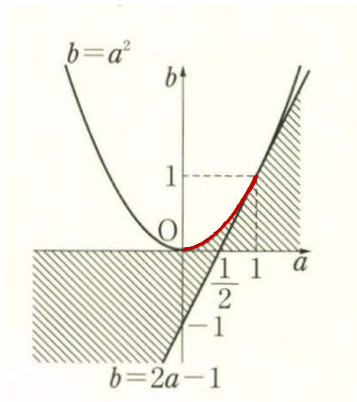
【質問】
(i)1つだけ解を持つとき
f(0)f(1)≦0より
b(1-2a+b)≦0・・・①

(ii)2つ解を持つとき
f(0)>0・・・②,
f(1)>0・・・③
(判別式)>0よりa^2-b>0・・・④
0<a<1・・・⑤

(i)または(ii)というふうに数1Aでやったように解いて、abを図示すると解答と同様になりましたが、たまたまですか？

【回答】
偶然ではなく、正しい解法の一つです。解の個数によって場合分けする解法は有効な解法の一つであり、上に列挙された条件もほぼ正しいですが、質問者さんの条件には2つ抜けているものがあります。

一つは(ｉ)1つだけ実数解を持つときの条件で、
「グラフ$y=f(x)$が$0\leqq x\leqq 1$でx軸と接する」という場合が抜け落ちています。
この条件を数式化すると
「判別式$D/4=0$かつ、軸が$0\leqq x\leqq 1$の間」つまり、
「$a^2-b=0$かつ、$0\leqq a\leqq 1$」
$\Leftrightarrow b=a^2, 0\leqq a\leqq 1$
です。つまりab平面上の右図の赤い部分(境界部分)が抜けているということになります。



もう一つは(ⅱ)2つ実数解を持つときの条件で、
「$x=0,1$の2解を持つとき」が抜けています。
これについては
$f(0)\geqq 0, f(1)\geqq 0$と②、③の条件に等号を付けることで解消できます。