

Q. (数2B基礎問題精講 例題132(2) P204)

シグマの式を立てる所までは理解できますが、計算方法がわかりません。(等差数列の和の公式を使っての計算はわかります。)

注意書きの下にあるようにシグマを分解して計算しても、 $k=0$ になるときの計算方法を理解していないのか、答えが合いません。

A.

$\Sigma$ 計算のコツは、 $\Sigma$ が表している式を再現できるかどうかです。例えば

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

と、 $\Sigma$ が計算している式をイメージしておきます。

この問題では $k=0$ からスタートする $\Sigma$ 計算がありますが、

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

と、0以外は $k=1$ からスタートする $\Sigma$ 計算と同じです。つまり、

$$\sum_{k=0}^n (kの式) = (k=0のときの値) + \sum_{k=1}^n (kの式)$$

ということが一般的に言えます。テキストの別解ではこれを利用して

$$\sum_{k=0}^n (n-k+1) +$$

$$= (n-0+1) + \sum_{k=1}^n (n-k+1) + \sum_{k=1}^n (n-k+1)$$

$$= (n+1) + 2 \sum_{k=1}^n (n-k+1)$$

と変形しています。

また、(注)にあるように分解する方法でも同じように計算ができます。

まず、変数である $k$ を含むものとそうでないもの(定数)に分けます。

$$\sum_{k=0}^n (2n-2k+1) = -2$$

ここで、それぞれの $\Sigma$ について計算をします。

$$-2 \sum_{k=0}^n k = -2 \{0 + \sum_{k=1}^n k\} = -2 \left\{0 + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= -n(n+1) = -n^2 - n$$

$$\sum_{k=0}^n (2n+1) = (2n+1) + \sum_{k=1}^n (2n+1)$$

$2n+1$ は $k$ によらず一定なので、この $\Sigma$ は $(2n+1)$ を $n$ 回足すという意味です。したがって $(2n+1)$ を $n$ 倍すればよいので

$$= (2n+1) + n(2n+1) = (n+1)(2n+1)$$

$$= 2n^2 + 3n + 1$$

これより、

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (-n^2 - n) + (2n^2 + 3n + 1) = n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2\end{aligned}$$

と求められます。