Ｑ．（数学標準問題精講　標問 115 の研究　P270）
有心２次曲線の標準化、の部分で、「本問と同様の計算によって…」以降の計算が分かりませんでした。どこから a+b/2 などが出て来るのでしょうか。

Ａ.
標問 115 の解答 1〜7 行目と同様の操作を行なっています。
ある点(x, y)を原点のまわりに$-\theta$回転したら、点(X, Y)に移ったとすると、xとyはそれぞれX, Y, θを用いて次のように表せます。

$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$ ー(ア)

$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$ ー(イ)

また、いま有心２次曲線

$ax^2 + 2hxy + by^2 + C = 0$ ー(ウ)

を原点の周りに$-\theta$回転すると、先に示した通り$x \to X, y \to Y$へ移るので

$AX^2 + 2HXY + BY^2 + C = 0$ ー(エ)

と表せます。
(ア)(イ)式を用いて、(ウ)式をX, Yで表し、その式を(エ)式と比較することで、未知の係数A, B, Hを求めることを考えます。

(ウ)式のx, yに(ア)(イ)式を代入すると

$a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) + b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 + C = 0$

です。これを(エ)式に近づけるために、X^2の項,Y^2の項,XYの項にそれぞれ整理すると、

X^2の係数：$a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta$

Y^2の係数：$a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta$

XYの係数：$-2a\cos\theta\sin\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2b\cos\theta\sin\theta$

ここで、２倍角の公式

$\sin2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

$\cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

を用いて式を変形します。
まず、$2\cos\theta\sin\theta$の部分を$\sin2\theta$に書き換えると、それぞれ

X^2の係数：$a\cos^2\theta + h\sin2\theta + b\sin^2\theta$

Y^2の係数：$a\sin^2\theta - h\sin2\theta + b\cos^2\theta$

XYの係数：$-a\sin2\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + b\sin2\theta$

となります。

次に$\cos^2\theta, \sin^2\theta$について、２倍角の公式より

$\cos^2\theta = \cos^2\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos2\theta + \frac{1}{2}$

$\sin^2\theta = \sin^2\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\theta) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos2\theta + \frac{1}{2}$

となるので、この関係を用いて$\cos2\theta$に書き換えると、それぞれ

X^2の係数：$a(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}) + h\sin 2\theta + b(-\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2})$
Y^2の係数：$a(-\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}) - h\sin 2\theta + b(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2})$
XYの係数：$-asin2\theta + 2h\cos 2\theta + b\sin\_2\theta$

となります。最後に、（定数項）+｛（$\cos 2\theta$の項）+（$\sin 2\theta$の項）｝に並び替えることで
X^2の係数：$\frac{a+b}{2} + (\frac{a-b}{2}\cos 2\theta + h\sin 2\theta)$
Y^2の係数：$\frac{a+b}{2} - (\frac{a-b}{2}\cos 2\theta + h\sin 2\theta)$
XYの係数：$2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta$
となります。これと、(エ)式の係数を比較することで、
解答の⑤式が導かれています。

ここでは２倍角の公式を用いた三角関数の変形が理解できるようにしておきましょう。