Q．（基礎問題精講数学Ⅲ 例題 93 P170）
別解は部分積分を用いていますが、2 つ目の式から 3 つ目への式への移行がよく分かりません。部分積分の定理を丁寧に用いれば導き出せるのですが、試験中にそのような事を出来る自信がありません。　別解のやり方のコツはありますでしょうか。

A．
そもそも、別解で行なっているのは部分積分ではなく、合成関数の積分です。

$F(x), g(x)$の合成関数$F(g(x))$を微分すると

$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$

両辺をxで積分すると

$F(g(x)) + C = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx$

左辺と右辺を入れ替えると

$\int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$

$F(x)$の導関数、すなわち$F'(x)$を$f(x)$とすると

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$ ---(★)

………………………………………………………………………………………………

となります。

$f(g(x))$はある一つの関数$g(x)$だけを使って書かれた式と捉えるとよいです。

例えば$\frac{(\log x)^2+2}{3\log x}$という式は全て$\log x$だけを使って書かれているので、$g(x) = \log x$とすれば、

$\frac{(\log x)^2+2}{3\log x} = \frac{(g(x))^2+2}{3g(x)}$と書け、$f(x) = \frac{x^2+2}{3x}$とおいてあげれば

………………………………………………………………………………………………

$f(g(x)) = \frac{(\log x)^2+2}{3\log x}$となります。

合成関数の積分を用いて計算を簡単にしようとしているのが別解の方針です。そのためには被積分関数と(★)式を見比べて、$f(x), g(x)$がそれぞれ何なのかを見抜く力が必要になります。実践を積んで積分の流れを把握するのが最も重要ですが、その際に意識しておくべきことを説明します。

まずそれぞれの関数$g(x)$の微分形を頭に浮かべておきます。例えば

$g(x) = x$のとき、$g'(x) = 1$

$g(x) = \log x$のとき、$g'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \sin x$のとき、$g'(x) = \cos x$

$g(x)=\cos x$ のとき、$g'(x)=-\sin x$

$g(x)=\tan x$ のとき、$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

$g(x)=e^x$ のとき、$g'(x)=e^x$ など
※対数関数や三角関数は特に頻出です。

次に、被積分関数の中から$f(g(x))$の要素と$g'(x)$の要素を探します。ここで$g'(x)$の方から特定すると答えに辿り着きやすいです。ここでは(3)を例に解説します。
(3)での被積分関数は$\cos x$ と$\log(\sin x)$の積になっています。このうち一方が$f(g(x))$で、もう一方が$g'(x)$であると推測し、$f(x), g(x)$を特定していきます。

対数関数および三角関数が登場しているので
（ア）$g'(x)=(\log x)'=\frac{1}{x}$

（イ）$g'(x)=(\sin x)'=\cos x$

（ウ）$g'(x)=(\cos x)'=-\sin x$
の 3 パターンの可能性があると頭に浮かべておきます。この中から、

$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ の形に当てはまりそうなものを検討します。
（ア）の場合、$\frac{1}{x}$が被積分関数の中に存在しないので不適です。
（ウ）も、$\sin x$ が単独で存在しないため不適です。
（イ）の場合、$g(x)=\sin x$ なので$f(g(x))=\log(\sin x)$とすれば$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ の形に当てはめられます。したがって$f(x)=\log x$ であると見抜けます。
$f(x)$の原始関数は$F(x)=x\log x-x$ なので、(★)式の関係から
$\int \cos x\log(\sin x)dx=\sin x\log(\sin x)-\sin x+C$
が導けます。

また積分の反対が微分になっていることを利用し、積分した後に検算で微分してみると関数の形を見抜く手助けになるので、積分の計算の都度確かめてみることをお勧めします。