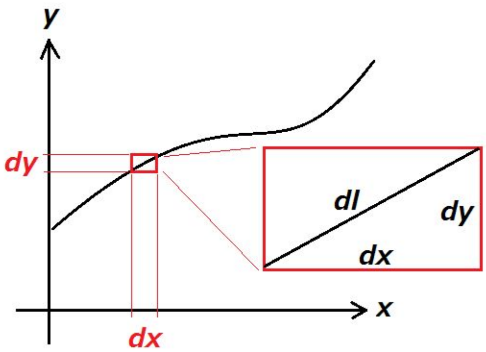
Q.（数学Ⅲ基礎問題精講　例題124　P228）
P229のポイントに記載されてある、2つの公式の成り立ちが分かりません。
何故、曲線の長さを求める際にこれらの公式が使えるのでしょうか？

【回答】



上の図のように、曲線のある微小部分 dx について見ると、非常に細かく切り取っているので**曲線を直線とみなす**ことができます。この近似により、曲線の微小部分の長さを、三平方の定理を用いて求めることができます。

dx 部分の y 方向変位を dy 、微小部分の曲線の長さを dl とおくと、三平方の定理により

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

dx を根号の外へ出すと、

$$dl=\sqrt{1+(\tfrac{dy}{dx})^2}\,dx$$

ここで、$\frac{dy}{dx}=f'(x)$ なので

$$dl=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

このように微小部分での長さ dl を $a\leqq x\leqq b$ の範囲で足し合わせていくので、曲線の長さは

$$\int_a^b dl=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

と表せます。

Ⅱの式も同様に導出することができます。媒介変数 t を用いた場合、

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

において、$\frac{dt}{dt}$ をかけ、$\frac{1}{dt}$ を根号の中に入れ込むと、

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\,\frac{dt}{dt}$$
$$dl=\sqrt{(\tfrac{dx}{dt})^2+(\tfrac{dy}{dt})^2}\,dt$$

ここで、$\frac{dx}{dt}=f'(t),\ \frac{dy}{dt}=g'(t)$ なので

$$dl=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

となります。したがって

$$\int_a^b dl=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$