

Q. (数 2B 基礎問題精講 P252 例題 163(2))

解答を見たら意味は分かるのですが、このような問題に対してどのように考えていけば良いのかわかりません。

A.

ベクトル問題の方針の立て方として、(2) のように証明したい式や求めたい値などがある場合は、その式に登場するベクトルをすべて基準となるベクトルの一次結合の形で表すことが大切です。一次結合とは、 $\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \dots$ ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$ は実数) のようなベクトルの和の形で表すことです。線形結合とも言います。

本問の例で説明すると、AR:RB, CQ:QR に登場する点のうち、

A, B, C は、四面体 OABC の頂点であり、 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ は基準のベクトルとして扱われています。

また、(1) で Q も $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ を用いて一次結合の形 ($\vec{OQ} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}$) で表せています。

よって、まず最初の作業として残りの点 R を Q と同じように $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ を用いて表していきます。作業は解説にある通りです。

次の作業として、AR:RB を考えますが

三点 A, R, B は一直線上に並んでいるので、この比は「線分 AB を点 R がどのように内分しているか」ということの言い換えでもあります。内分しているということに気付ければ、

ベクトルの m:n の分点公式 $\vec{OR} = \frac{n\vec{OA} + m\vec{OB}}{m+n}$ を利用することに気付けます。

よって、 $\vec{OR} = \frac{s\vec{OA} + (1-s)\vec{OB}}{1}$ の形にしたいのですが、ここで \vec{OC} が残ってはいけないので、

\vec{OC} の係数 = 0 である必要があるため、 $1 - \frac{3}{4}s = 0$ という条件が出てきます。

この $s = \frac{4}{3}$ を代入すると、 $\vec{OR} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{2+1}$ より、R が AB を 2 : 1 に内分することがわかります。

よって、AR:RB=2:1 となります。

CQ:QR についても同様で、三点 C, Q, R が一直線上に並んでいることより、CR を Q がどのように内分しているかを分点公式の形に直して求めることで比を出していきます。

ポイント

① 立体なら 3 つの基準ベクトル、平面なら 2 つの基準ベクトルを定めて、すべての点をその基準ベクトルの一次結合の形で表すこと

② 比は内分点の発想を使って考える