

Q. (数2B基礎問題精講P214 例題137(2))

P215の解説の12行目の式は、何故等号を入れていいのでしょうか。

A.

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} \geq \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

から普通に式変形すると、

$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$ となるのですが、本間では最終的に示したい式に等号が入っているため、明らかに左辺の方が大きいことが分かっているので左辺 \geq 右辺といってもよい、という議論になります。ただし、数学的に少し納得しにくいところもあるので、少し補足します。

i) $n=1$ のとき

左辺 = 1、右辺 = $\frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1$ となり、 $n=1$ のとき②は成立する。(②の式の**等号成立条件**)

ii) $n=k$ のとき②が成立すると仮定すると

～中略～

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} \geq \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2} \quad \text{よって、} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

ここでは、式変形により等号を含まない式までが証明できました。

ただし、i)の結果より $n=1$ のときは等号が成立するので、すべての自然数についてみたときには等号をつけても良いということがわかります。

よって、すべての自然数については $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \frac{2n}{n+1}$ であることが言えました。

簡単にいうと、 $n=1$ のときに等号が成立するため最終的な答えには等号をつけてよいということです。