

Q. (数学III標準問題精講p.225 演習97-2(2))

解答の補助をお願いします。

A.

まず、「原点を中心とする半径1の円周上」というところから単位円のグラフを頭に浮かべます。「円周をn等分」という部分は、「基線を基準に  $\frac{2\pi}{n}$  ずつ回転していく」と読み替えると、数学的に扱いやすくなります。

ここで、解答の補足にもあるように  $A_0$  を基線として考える(回転角  $\theta = 0$ 、x軸上にのる)と、以降の回転が扱いやすくなります。

$A_k(z^k)$  になるのは、「k番目の点までは  $A_0$  から回転  $z$  を k 回行う」からです。ここでの回転  $z$  とは  $\frac{2\pi}{n}$  ずつの回転のことです。

線分  $A_k P$  の長さ  $l_k(P) = |z^k - \alpha|$  で表せるので、
$$\sum_{k=0}^{n-1} l_k(P)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - \alpha|^2$$
 となります。

以下は式変形です。

$\Sigma$  の中身は  $k$  が変数として扱われるので、

・  $\alpha$  は係数として前に出てくること

・  $|z^k|^2 = 1$  より、項数が  $k=0 \sim n-1$  まで  $n$  個なので  $\sum_{k=0}^{n-1} |z^k|^2$  は  $1 \times n = n$  となること

・ 同様に  $|\alpha|^2 = \frac{1}{4}$  より、 $\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^2$  は  $\frac{1}{4} \times n = \frac{n}{4}$  となること

などに注意してください。