Q.(標準問題精講数学ⅠA P56 例題 25)
解説の補助をお願いします。

A.
(1)
【方針】
不等式を扱う問題では**グラフの上下関係をイメージする**ことで問題へのアプローチがしやすくなります。
与えられた不等式は両辺に変数があるため、このまま考えると 2 つのグラフを描く必要がありそうです。そこで変数を全て片方に移項し(x について整理し)、$x^2+(1-a)x-3<0$とすると、左辺は放物線、右辺は y=0 すなわち x 軸になります。この大小関係を、1≦x≦3 の範囲で比較し、放物線が x 軸の下にくるように a の範囲を決定します。

2 次不等式を解くには放物線をイメージすることは述べましたが、具体的には放物線について

1. 放物線の軸はどこに存在するか
2. x 軸と何か所で交わるか
3. x の範囲の境界部分の正負

の 3 つを考えることが重要です。

1.放物線の軸はどこに存在するか
放物線と x 軸の上下関係を考える上で、放物線の折り返し部分である軸は重要な要素になります。軸が 1≦x≦3 の範囲内にあるか範囲外であるかによって 2.や 3.を考える上で影響しますが、今回の問題では**軸の位置によらない**ので考える必要はありません。

2.x 軸と何か所で交わるか
放物線が x 軸より下にくる部分が存在するためには、放物線と x 軸は 2 点で交わらなければなりません。このことから判別式 **D>0 を思い出せるようにしておきましょう。**

$x^2+(1-a)x-3=0$の解の判別式を D とすると、放物線が x 軸と 2 点で交わるには D>0 である必要があるので、

$D=(1-a)^2-4\times1\times(-3)>0$

$(1-a)^2+12>0$

ところが$(1-a)^2\geqq0\,,12>0$なので、a によらず D>0 です。

結果論になりますが、この放物線は a の値に関係なく x 軸と 2 点で交わるので 2.については考える必要がなかったようです。

3.x の範囲の境界部分の正負

この放物線は下に凸の形なので、もし x の範囲の境界部分、つまり **x=1 と x=3 で放物線がどちらも負**であれば、1≦x≦3 の範囲で放物線は常に負になります。

1〜3 をまとめると、放物線$y=x^2+(1-a)x-3$が 1≦x≦3 で放物線が常に x 軸より下にあるためには、放物線が x=1 と x=3 でどちらも負であればよい、ということになります。今回は 3.だけを考えればよかったことになりますが、どのような問題でも必ず 1.〜3.について考えるようにしましょう(実際、(2)では 1.〜3.を全て考えることが必要です)。

3.の内容を式化すると以下の【解説】のようになります。

【解説】

$f(x)=\ x^2+(1-a)x-3$とすると、1≦x≦3 で$f(x)<0$であるための条件は

f(1)<0 かつ f(3)<0 です。

$f(1)=1+(1-a)-3=-a-1<0$

$\Leftrightarrow a>-1$

また$f(3)=9+3\times(1-a)-3=-3a+9<0$

$\Leftrightarrow a>3$

これら 2 つの共通範囲から、求める a の範囲は a>3

(2)

【方針】

(1)と似たような問題ですが、(1)ははじめから x の範囲が定められているのに対し、(2)は「$x^2-(p+5)x+5p \leqq 0$を満たす x」と与えられています。まずはこの不等式を解くことで x の範囲を求めましょう。

$x^2-(p+5)x+5p \leqq 0$を変形すると$(x-p)(x-5) \leqq 0$となり、p が 5 より大きいか小さいかで場合分けが必要になります。

(ア)$p<5$ のとき、$p \leqq x \leqq 5$

(イ)$5 \leqq p$ のとき、$5 \leqq x \leqq p$

x の範囲は p の値によって 2 通りになりましたが、ここから先の考え方は基本的に(1)と同じです。

(ア)$p<5$ のとき

$p \leqq x \leqq 5$ の範囲で常に$x^2+2px+p^2-3p-1>0$が成り立つように p の値を決定します。

(1)と同様にグラフをイメージすると、$x^2+2px+p^2-3p-1>0$の意味は「放物線が x 軸より上にある」ということです。

1. 放物線の軸はどこに存在するか

軸は $x=-p$ です。軸と $p \leqq x \leqq 5$ の位置関係は 3 パターンあります。

(ⅰ) 軸が $p \leqq x \leqq 5$ の中にあるとき

(ⅱ) 軸が $p \leqq x \leqq 5$ の左側にあるとき

(ⅲ)軸が $p \leqq x \leqq 5$ の右側にあるとき

2.x 軸と何か所で交わるか

(ⅰ)では放物線の頂点を範囲に含むことになります。頂点は x 軸より上になければいけません。放物線は下に凸のグラフであることから、放物線は x 軸と交点を持たないので、判別式 $D<0$ となります。

3.x の範囲の境界部分の正負

(ⅱ)では、最も負になる可能性がある場所は $x=5$ のときで、このとき正であれば

セーフです。
(iii)では、最も負になる可能性がある場所は x=p のときで、このとき正であればセーフです。

(イ)p≧5 のとき
(ア)と同様に、5≦x≦p の範囲で常に$x^2+2px+p^2-3p-1>0$が成り立つように p の値を決定します。

1.放物線の軸はどこに存在するか
軸は x=-p です。軸と 5≦x≦p の位置関係は 3 パターンあります。
(ｉ) 軸が 5≦x≦p の中にあるとき
(ⅱ) 軸が 5≦x≦p の左側にあるとき
(ⅲ)軸が 5≦x≦p の右側にあるとき

(ｉ) $\Leftrightarrow 5 \leqq -p \leqq p \Leftrightarrow \mathbf{p \leqq -5}$**かつ**$\mathbf{p \geqq 0}$
(ⅱ) $\Leftrightarrow -p < 5 \Leftrightarrow \mathbf{p > -5}$
(ⅲ) $\Leftrightarrow p < -p \Leftrightarrow \mathbf{p} < 0$
いま、p≧5 なので(ⅱ)しか起こりえませんので、軸は 5≦x≦p の左側にあります。

2.x 軸と何か所で交わるか
いま放物線の軸が左側にあることが分かったので、3.だけを考えればよいです。

3.x の範囲の境界部分の正負
軸が 5≦x≦p の左側にあるので、最も負になる可能性がある場所は x=5 のときで、このとき正であればセーフです。

少々煩雑で混乱しそうですが、(1)で行ったのと同じことを、p の場合分けによって 2 回行っているに過ぎません。p の場合分けに注意し、落ち着いて解きましょう。

【解説】

$x^2-(p+5)x+5p \leqq 0$を変形すると$(x-p)(x-5) \leqq 0$

(ア)$p<5$ のとき、$p \leqq x \leqq 5$

放物線の軸 $x=-p$ と $p \leqq x \leqq 5$ の位置関係によって 3 つに場合分けされます。

(ⅰ)$p \leqq -p \leqq 5$　⇔　$-5 \leqq p \leqq 0$ のとき

$f(x)=\ x^2+2px+p^2-3p-1$とし、方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、放物線 $y=f(x)$と x 軸は交点を持たないので

$D<0$

$4p^2-4(p^2-3p-1)<0$

$\Leftrightarrow 4(3p+1)<0$

$\Leftrightarrow p<-\frac{1}{3}$

よって$-5 \leqq p \leqq 0$と合わせて

$-5 \leqq p<-\frac{1}{3}$

(ⅱ)$-p<p<5$　⇔　$0<p<5$ のとき ←(ア)$p<5$ という条件を忘れずに！

$p \leqq x \leqq 5$ の範囲で $f(x)$の最小値は $x=p$ のときなので

$f(p)>0$

$\Leftrightarrow p^2+2p^2+p^2-3p-1>0$

$\Leftrightarrow 4p^2-3p-1>0$

$\Leftrightarrow (4p+1)(p-1)>0$

$\Leftrightarrow p<-\frac{1}{4}, p>1$

よって $0<p<5$ と合わせて$1<p<5$

(ⅲ)$p<5<-p$　⇔　$p<-5$ のとき

$p \leqq x \leqq 5$ の範囲で $f(x)$の最小値は $x=5$ のときなので

$f(5)>0$

$\Leftrightarrow 25+10p+p^2-3p-1>0$

$\Leftrightarrow p^2+7p+24>0$

この p に関する不等式は因数分解が困難です。そのときは不等式が p によらず

成立することがあるので、それを確認してみます。つまり p の二次式の最小値を調べます。そのために不等式の右辺を平方完成させます。

$$f(5) = p^2 + 7p + 24 = \left(p + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 24$$

$$= \left(p + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{4}$$

よってこれの最小値は$\frac{47}{4}$となり、p がどんな値でも f(5)>0 であることが分かりました。よって p<-5 のときも常に f(5)>0 となるので、

$p < -5$

(ⅰ)～(ⅲ)をまとめると

$p < -\frac{1}{3}, 1 < p < 5$

(イ)p≧5 のとき、5≦x≦p

軸 x=-p は 5≦x≦p の左側にあるので、この範囲での f(x)の最小値は f(5)

よって

$f(5) > 0$ となればよい

これは(ア)(ⅲ)より、p の値によらず常に成り立つので、p≧5 のときも成り立ちます。

よって$p \geqq 5$

(ア)(イ)をまとめると、求める p の範囲は

$p < -\frac{1}{3}, 1 < p$