

Q. (数学 IIB 基礎問題精講 例題 75、演習 75)

精講の公式の解説では左端の不等号は「 \leq 」となっているのに、問題の解答では「 $<$ 」となっているのはなぜですか？

A. 左端の不等号が、 $<$ か \leq かというのはここでは大きな問題ではありません。

ちなみに、「 \leq 」の方が範囲が狭く「 $<$ 」よりも厳しい条件になっています。

そのため、 $n-1 \leq \log_{10} A < n \Rightarrow n-1 < \log_{10} A < n$ という関係性になっています。

なので、公式で $n-1 \leq \log_{10} A < n$ と与えられていれば、必要条件なので $n-1 < \log_{10} A < n$ と書いても理論上問題はありません。

ここで気を付けなければいけないのは、等号が付く可能性があるのは左端の条件だけだということです。右端には=をつけてはいけません。

$$n-1 \leq \log_{10} A \Leftrightarrow 10^{n-1} \leq A$$

$$\log_{10} A < n \Leftrightarrow A < 10^n$$

$$100000 \dots 0 (\leftarrow n \text{桁}) = 10^{n-1} \leq A < 10^n = 100000 \dots 0 (\leftarrow n+1 \text{桁})$$

という理論です。

ちなみに、 n 桁の $100000 \dots 0$ は n 桁の整数の中で最も小さい整数です。よって、それと同じかそれより大きい整数である A は n 桁であるといえます。

同じように、 $n+1$ 桁の $100000 \dots 0$ は $n+1$ 桁の整数の中で最も小さい整数です。

※一つ前は $99999 \dots 9$ で n 桁

よって、 $100000 \dots 0$ よりも小さい整数 A は n 桁であるといえるのです。右端の $<$ に等号が入ってしまうと、等号が成立するとき $A = 100000 \dots 0$ で A が $n+1$ 桁になってしまうので条件として不適切です。

以上の理由より、「左端の不等号には=を付けても付けなくてもよい、右端の不等号には=をつけてはいけない」といえます。