

Q. (標準問題精講 2B p296 演習 131-3(3))

別解のやり方について、解説の補助をお願いします。

A.  $a_1$  から  $a_n$  までの中で、二つが 1 で、残りすべてが 0 のときを考えればよいですね。そこで別解では (2) が (3) の誘導になっていると考え、(2) の結果を用いるために、 $j$  ( $j$  は  $1 \leq j \leq n$  を満たす整数) を固定して、考える。すると、 $a_1$  から  $a_n$  までの間に  $a_j$  を除いて考えると、一つが 1 で残りは 0 という (2) とほぼ同じ条件になる。

いま、(2) とに、1 から  $n$  までの整数の中から、 $a_k=1$  となる  $k$  を選ぶことを考えると、 $S_n$  の要素として  $2^{j-1}$  と  $2^{k-1}$  ( $k$  は 1 から  $n$  までの  $j$  以外の整数) が考えられる。

したがって、 $S_n$  の要素の和は (2) より、 $(2^n-1)-1*2^{j-1}$  と求まる。

ここで、 $1*2^{j-1}$  を引いたのは、 $k=j$  となってしまう場合を除いたからである。

ただ、 $S_n$  の要素の和としてはまだ十分ではなく、 $2^{j-1}$  は  $2^{k-1}$  の種類の数 (すなわち取りうる  $k$  の値の種類の数) の  $n-1$  回だけ  $S_n$  の要素の和を求める過程で、足し合わせられることになるので、 $(2^n-1)-1*2^{j-1}$  に  $(n-1)2^{j-1}$  を足して、 $S_n$  の要素の和は  $(2^n-1)-1*2^{j-1}+(n-1)2^{j-1}$  と求まる。

あとは固定していた  $j$  を 1 から  $n$  の範囲まで動かすと、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (2^n - 1) - 1 * 2^j - 1 + (n - 1)2^j - 1 \\ &= 2(n-1)(2^n-1) \end{aligned}$$

(3) の別解ではない解答では  $k$  と  $j$  との大小関係を考えているが、別解の解答では考えていないので、上の値は同じものを二倍重複して数えているので、上の値を 2 で割って答えは

$(n-1)(2^n-1)$  と求まる。