

Q. (数 I A 標準問題精講 P. 150 標問 66)

境界線の取り方がわかりません。例えば、(2)で利用する  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$  を(1)の  $LL'$ ,  $MM'$  の代わりに使えないでしょうか。また逆に、 $MM'$ ,  $LL'$  の並びで境界線は取れないでしょうか。

A. (1) と (2) の境界線の取り方の違いは、「C 地点を通るか通らないか」にあります。

また、境界線を取るメリットは、「障害物があっても、境界線の前後に分けることで普通の経路問題として扱える」ということです。適切に境界線を設定することで、境界線の前後それぞれで「→に●回、↑に△回の組み合わせ」を求めて、それぞれをかけることで求められます。このように扱えるような境界線を設定する必要があります。

(1) では、C 地点を通るので、C から B まで池を回避して、かつ最短で行くことを考えたときに通過すべき通路を挙げています。この行き方では、 $LL'$ ,  $MM'$ ,  $NN'$  のいずれかを必ず一度通らなければなりません。また、 $LL'$  を通ってから  $MM'$  を通るなどというのではなく、この3つのいずれかを1回だけ通る必要があります。

逆にいうと、境界線の取り方はこのような経路を指定できるように取らなければなりません。

この指定を満たしているので、 $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$  を(1)の  $LL'$ ,  $MM'$  の代わりに使うことも可能です。

この場合、境界は  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$ ,  $SS'$  の4つになって、

$A \rightarrow C \rightarrow R \rightarrow R' \rightarrow B$  の経路が

$$3 \times \frac{4!}{1!3!} \times 1 \times \frac{5!}{3!2!} = 120$$

$A \rightarrow C \rightarrow Q \rightarrow Q' \rightarrow B$  の経路が

$$3 \times \frac{5!}{1!4!} \times 1 \times \frac{4!}{3!1!} = 60$$

$A \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow P' \rightarrow B$  の経路が

$$3 \times \frac{6!}{1!5!} \times 1 \times 1 = 18$$

$A \rightarrow C \rightarrow S \rightarrow S' \rightarrow B$  の経路が

$$3 \times 1 \times 1 \times \frac{6!}{1!5!} = 18$$

$120+60+18+18=216$  となり、答えは一致します。

(2)

まず、Cを通ってもよい場合の経路を考えます。

MM', LL' の並びに4つ設定した場合、右から MM', LL', ZZ', YY' として境界を設定します。

条件を満たしているので、この方法でも解くことはできます。

A→M→M' →B の経路が

$$\frac{6!}{3!3!} \times 1 \times \frac{6!}{4!2!} = 300$$

A→L→L' →B の経路が

$$\frac{5!}{2!3!} \times 1 \times \frac{7!}{5!2!} = 210$$

A→Z→Z' →B の経路が

$$\frac{4!}{1!3!} \times 1 \times \frac{8!}{6!2!} = 112$$

A→Y→Y' →B の経路が

$$1 \times 1 \times \frac{9!}{7!2!} = 36$$

A→S→S' →B の経路が

$$\frac{6!}{5!1!} \times 1 \times \frac{6!}{1!5!} = 36$$

A→T→T' →B の経路が

$$1 \times 1 \times \frac{7!}{1!6!} = 7$$

300+210+112+36+36+7=701 となり、値も一致します。

ただし、この境界線の取り方だと場合分けの数が多くなり計算量が増えるため、解答の方法の方が適切であるといえます。

条件を満たしていて、かつ場合分けの数が最小になるような境界を設定しましょう。