

Q. (標準問題精講 3 p.229 演習問題 99-3)

最初の $|z|=1$ の展開はわかりますが、解説の「したがって」からのあとの式の意味が理解できません。 z^3-1 というのはどこから来たのでしょうか。

A. 四角形Qについて2頂点1と z^3 がとなり合うということは、残りの2頂点である z^2 と z がとなり合うということです。

そのため、それぞれ2点ずつを結んでできる直線どうしの平面上での関係を調べます。

そのための式が $\frac{z^3-1}{z^2-z}$ です。

$$\frac{z^3-1}{z^2-z} = \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{z(z-1)} = \frac{z^2+z+1}{z} = z + \frac{1}{z} + 1 = (z + \bar{z}) + 1 \quad \leftarrow \text{実数}$$

ここで $\frac{z^3-1}{z^2-z}$ が実数となるということは、虚軸方向の成分が0なので、「1と z^3 を結んだ直線」

と「 z^2 と z を結んだ直線」は平行であることがわかりました。

よって、この四角形Qは1と z^3 をとなり合う頂点とする台形であることを示すことができました。

①となり合うという条件からその二つの頂点を結んだ直線が図形の辺となること、②台形という条件から図形の中にお互いに平行になる辺の組が存在すること、の2つを利用して証明しました。