

Q. (標準問題精講 3p177 演習問題 76-2)

解答の補助をお願いします。

A.

まず、問題の図がわかりにくく、 dS は曲面の一部ですから、輪型になっているイメージが欲しいです。

ここで、 S の面積は、変数を s と考え、微小面積を集めたものですから、 s の取りうる範囲を $0 \leq s \leq s'$ とすると、

$$S = \int_0^{s'} dS = \int_0^{s'} 2\pi x ds$$

となります。…①

ここで、曲線の長さを考えると、

$$s' = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

となります。…②

ここで、①②を用いて、 S の式で x に置換してやればよく、そうすると、

$$S = \int_0^1 2\pi x \frac{ds}{dx} dx = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

と変形できます。後は x で積分することで答えが求められます。

図形のイメージしにくい体積を求める問題では、どの変数に沿って微小面積を集めるかを考えることが大事です。

今回の場合、変数を置換しなくてはならないので難易度が高いです。まず s の式で表して、そのままでは計算できないので、そこで変数を置換する、という発想に至ればやることはわかりやすいと思います。