Q．（標準問題精講 3　標問 93）
解説の補助をお願いします。（図形的処理が絡み難しいと感じました）

A．
(1) α、β のうち少なくとも一方が 0 のとき、与式が成り立つのは明らかである。したがって、α、β がどちらも 0 でない場合を考える。
複素数平面の原点を O として、α、β を表す点をそれぞれ A, B、$\alpha+\beta$ を表す点を C とする。
(ⅰ) O, A, B が 1 直線上にないとき
OACB は平行四辺形をなす。　（ベクトル OA と OB の合成と同じ要領です）
三角形 OAC において 2 辺の和は他の 1 辺より大きく、2 辺の差は他の 1 辺よりも小さい（三角不等式）から、
$|OA-AC|<OC<OA+AC$
これと、平行四辺形の性質より、AC=OB=$|\beta|$であるから、
$||\alpha|-|\beta||<|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$
が成り立つ。
(ⅱ) O, A, B が 1 直線上にあるとき
A, B が O に関して同じ側にあれば、$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$
A, B が O に関して反対側にあれば、$|\alpha+\beta|=||\alpha|-|\beta||$（p215 の 2 つのうちの下の図を見ればさらにわかりやすいと思います。）
よって、(ⅰ), (ⅱ) より、与式が示された。
また、等号は (ⅱ) のとき成立する。

(2) 背理法で示す。
$z^2+az+b=0$ ……①の解 z が
$|z|\geqq 1$ ……②
を満たすと仮定する。

ここで、(1) を利用することを考えます。(1) の不等式は文字と文字を比べるものでした。これに対して、(2) の $|a|+|b|<1$ は文字と数字 1 を比べています。そこで、1 を文字に置き換えることを考えて、
① の両辺を z^2 で割ると、

$$1+\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}=0$$

$$1=-\left(\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}\right)$$

両辺の絶対値をとって (1) の不等式を用いると、

$1=\left|\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}\right|\leqq\frac{|a|}{|z|}+\frac{|b|}{|z|^2}$ ……③

ここで②より、$\frac{|a|}{|z|}\leqq|a|, \frac{|b|}{|z|^2}\leqq|b|$

であるから、これと③より、

$1\leqq\frac{|a|}{|z|}+\frac{|b|}{|z|^2}\leqq|a|+|b|$

となるが、これは条件$|a|+|b|<1$ に反する。
よって題意が示された。