

Q. (数学Ⅲ標準問題精講 標問 45)

平均値の定理を用いた証明の問題と似ているように見えたのですが、平均値の定理でも解けますか？

A.

平均値の定理は、 $f(b)-f(a)/b-a=f'(c)$ を満たす  $c$  が  $a \leq c \leq b$  に存在する、というのですが、今回問題文を見てみると確かに非常に近い形になっており、使ってみようと思うのはとても良い発想だと思います。

具体的には、 $b-a$  を左辺に持つてくることによって、 $f'(c)$ に対応する部分が  $2/b+a$  だと分かります。なので、次のステップで証明すべきなのは、 $f'(c) \geq 2/a+b$  です。

今回  $f(x)=\log x$  なので  $f'(c)=1/c$  となります。つまり、 $1/c \geq 2/a+b$  を示せばよいわけですが、与えられている条件からこれを証明することはできません。

なので、今回は平均値の定理を用いて証明することはできないということになります。

このことから、一方を変数とみて微分して考える方が平均値の定理よりも精度が高いということが出来ます。