

Q, (基礎問題精講 2B 例題 121)

解説の補助をお願いします。(階差数列について)

A.

階差数列の基本的な考え方について説明します。


本問のように具体的な数字が並んでいる数列で、これまで扱ってきた等差数列でも等比数列でもないとき、となり合う項で差をとってみます。このときできた数列を階差数列といいます。この階差数列が、等差数列や等比数列のように一般項が簡単に求められるものの場合、もとの数列の一般項が求められます。

これは、具体的な数字が並んでいる数列に限らず、漸化式の形で書かれているものに関しても同様に用いることができます。

とくに、 $a_{n+1} = a_n + \sim$ 型のように漸化式において $a_n$ の係数が1、つまり $a_{n+1} - a_n = \sim$ の形で表されるものに関しては階差数列の考え方をを用いて解いていきます。

階差数列の考え方は次のとおりです。

ある数列 $a_n$ のとなり合う項の差をとって生じた新たな数列  $a_{n+1} - a_n = b_n$  が階差数列です。

|       |  |
|-------|--|
| もとの数列 | $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$              |
|       |  |
| 階差数列  | $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \dots b_{n-4}, b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1}$                   |

では、この階差数列を一般項 $a_n$ を求めるためにどうやって利用するかというと階差がとれる  $n \geq 2$  のとき、階差数列が定義されるから  $n \geq 2$  について考えると

$$a_n = b_{n-1} + a_{n-1}$$
$$a_{n-1} = b_{n-2} + a_{n-2}$$
$$a_{n-2} = b_{n-3} + a_{n-3}$$

.....

$$a_4 = b_3 + a_3$$
$$a_3 = b_2 + a_2$$
$$a_2 = b_1 + a_1$$
$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} + \dots + b_3 + b_2 + b_1 + a_1$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} b_k + a_1$$

ただしこれは  $n \geq 2$  について考えているので、 $n = 1$  のときも成り立つかどうかは別個に代入するなどして調べる必要があります。

具体的な数の列が与えられているタイプの問題の場合は、階差数列をとってみてその階差数列  $b_n$  の一般項を求めます。それを  $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$  の  $b_k$  の部分に代入することで、最終的に  $a_n$  を求めます。

階差数列で注意すべきポイントはいくつかありますが、

- ・  $\Sigma$  記号の終点が  $n-1$  であること
- ・  $n = 1$  について別個に調べること

にはとくに注意してください。