Q. 数学 IIB 標準問題精講 P.296 演習 131-3(2)(3) 式の表し方がわからない。

A. 131-3(2) $a_1 \sim a_n$は、それぞれ 0 と 1 の場合があります。(2)の条件は、$a_1 \sim a_n$のうちどれか１つが１となり、そのほかは全て０になるということです。

例えば、$a_1 = 1$、$a_2 \sim a_n = 0$のとき、$\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{i-1}$=$a_1 2^0 = 1$となります。このようにして、$a_k = 1$のとき、$\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{i-1}$=$a_k 2^{k-1} = 2^{k-1}$になるので、k を 1~n まで動かした要素の和は、結局$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$になります。

(3) 条件より、$a_1 \sim a_n$のうちどれか２つが１となり、そのほかは全て０になります。つまり、a_j、a_kが 1（j < kとする）でその他が 0 の場合、$\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{i-1} = a_j 2^{j-1} + a_k 2^{k-1} = 2^{j-1} + 2^{k-1}$となります。ここで、j が定数とすると、k は、j+1 から n までの値をとるので、そのときの要素の和は、$\sum_{k=j+1}^{n} (2^{j-1} + 2^{k-1})$ となります。

これを計算すると、$\sum_{k=j+1}^{n} (2^{j-1} + 2^{k-1}) = \sum_{k=j+1}^{n} 2^{j-1} + \sum_{k=j+1}^{n} 2^{k-1} = (n-j)\, 2^{j-1} + \frac{2^{j}(2^{n-j}-1)}{2-1} = 2^n + (n-j-2)2^{j-1}$になります。$2^{j-1}$の方の計算は、j は定数とみているので、そのまま要素の個数である n-j をかけます。2^{k-1}の方の計算は、k は j+1 から n まで動くことから、初項$2^{j+1-1} = 2^j$、公比 2 の第 n-j 項までの和と考えて計算しています。

そして、実際には j は定数ではなく、1 から n-1 までの値をとるので、今度は j に注目して$\sum_{j=1}^{n-1} 2^n + (n-j-2)2^{j-1}$を計算して答えを導きます。

このように変数が２つあるような計算の場合、一方をとりあえず固定して考えるとうまくいくことがあります。