

Q (標準問題精講 3 標問 81)

解説の補助をお願いします。

A.

(1) $f(x)$ は具体的な式ではないので、直接計算するわけではないと考えます。 $F(t)$ を計算すると、 x と t の 2 文字が登場しますが、この式は t についての式なので、 x を定数と扱います。 $F(t)$ を簡単に表してみると、 $F(t) = at^2 + 2t + c$ (a, c ともに正) といった形です。 $F(t)$ が負になることがないということは、 $y=F(t)$ の $y-t$ 平面に表したときに、このグラフが t 軸と交差しない (= t 軸と接するか共有点をもたない) ということなので、判別式 D は 0 または負になります。

この問題で難しいところは、判別式を使って式の大小を求めるところでしょう。

(2) 問題の流れから、(2) は (1) を使って解いていくのだということが分かります。 $f(x)$ を具体的に決めるにあたって、(2) の式で厄介なのが $\frac{1}{1+x^2e^x}$ の部分なので、この積分を計算しなくていいように $f(x) = 1 + x^2e^x$ とおいて、照明を進めていきます。

(1) より、 $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{1}{\int_0^1 f(x) dx}$ なので、これを計算すると (2) の左半分は証明で

きます。右半分については何もヒントがなく、また $\frac{1}{1+x^2e^x}$ の積分を直接計算することはできないので、不等式の性質を使っておおざっぱに計算していきます。もともと知っている積分のやり方の中で、積分できるような分数は限られてくるので、なんとなく予想をつけて、 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^x} dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ とします。(右の積分は、 $x=\tan t$ などにおいて計算するやり方があります。)

以上のようにして、不等式を証明します。