Q．（標準問題精講3　標問74）
立体図形の捉え方がよくわかりません。

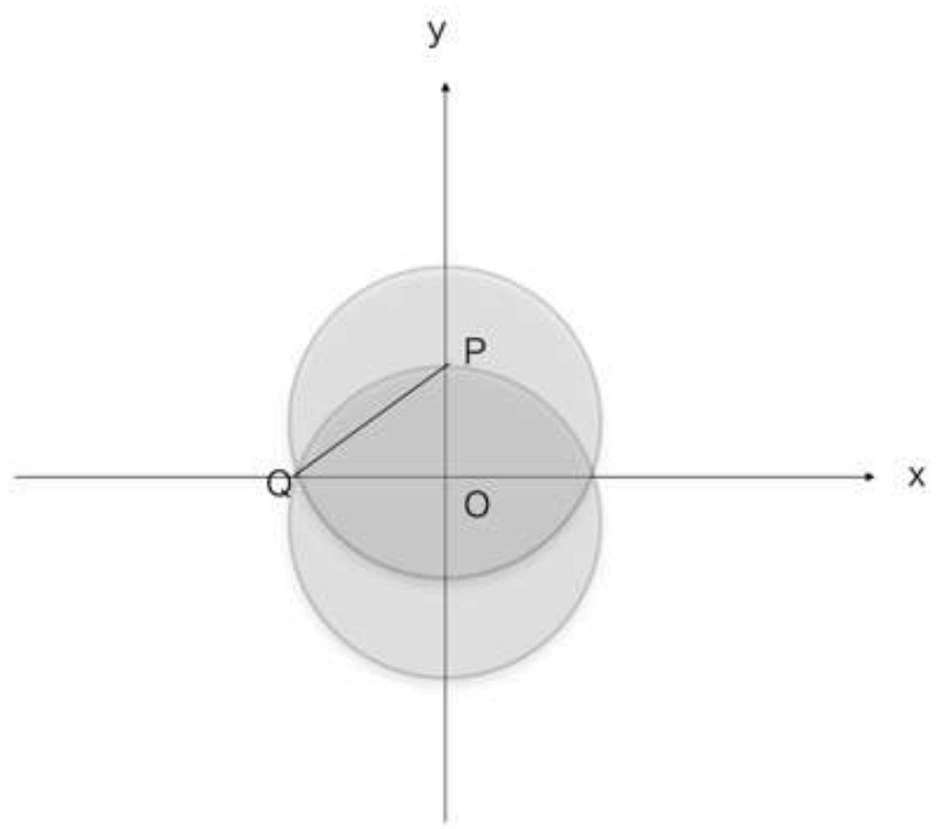
A．
まず，このような問題を解く時は，xyz のうちどれで切断する(積分する)のかをしっかり考えることが大事です．体積は，切断面の面積を積分してやると求まるので，切断面の面積を簡潔に立式できるもので切断することを考えます.

今回の場合，z で切るのが一番分かりやすそうなので，その方針を取ります.
また，xy 平面についてこの立体は対称ですから，z=t$(0\leq t \leq 1)$での切断面を考え，得られた体積を 2 倍します.

断面図は下図のようになります.

ここで立体図形を捉えやすくするために，まず座標軸を取り C をかき，その上の一箇所に D をかき，簡単に断面図を考えるようにします.

ここで，灰色の部分全体の面積を求めれば良いとわかります.
仮にその面積を S(t)とします.
重なりの部分(下図の色の濃くなっている部分)の面積を求めるために，∠QPO=θ とおきます.



ここで，点Ｐのｙ座標は，Ｃが yz 平面の原点を中心とする半径１の円周ですから，z=t のとき，y=$\sqrt{1-t^2}$ となります.
また，PQ の長さが１なので OQ の長さは三平方の定理よりｔです.
半径 1,中心角２θの扇型から,三角形 POQ の面積の２倍を引いたものを T(t)とすると，重なりの部分の面積は 2T(t)になります.

S(t)＝二つの円の面積 － 重なりの部分の面積
＝2π－2T(t)
＝2π－2$\left(1\times 1\times \pi \times \frac{2\theta}{2\pi}-t\sqrt{1-t^2}\right)$
＝2$\left(\pi-\theta+t\sqrt{1-t^2}\right)$

これを，ｔで０から１まで積分すれば良いのですが，θをｔで表すことが簡単にできそうにありません．そこで，変数をθに統一します.

図より，$\sin\theta = t$ なので

$S(t) = 2(\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta)$と書けます.

また，$\frac{dt}{d\theta} = cos\theta$ より，$dt = cos\theta d\theta$

そして，t が０から１まで変化する間に，θ は０から$\frac{\pi}{2}$まで変化します.

求める体積 V とすると，はじめに対称性を考えたことに注意して，

$V = \int_0^{\pi/2} 4(\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta)\cos\theta\, d\theta$

と立式でき，

$$\int_0^{\pi/2} (\pi - \theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, cos\theta^2 d\theta = \frac{1}{3}$$

なので，

$V = 4(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}) = 2\pi + \frac{16}{3}$

が求めるべき体積となります.