Q．（標準問題精講 3 例題 83）
解説の補助をお願いします。

A．
ポイント：積分の問題で大小比較している場合、まず初めに区分求積を疑う

(1)
$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt$を図示すると p192 の斜線部になります。
区分求積法では前問 82 でやった通り、斜線部より明らかに小さい面積と、斜線部より明らかに大きな面積とで挟んで大小比較をします。
この問題では定義域の中点である t=a での接点 N を考え、台形 APQD と台形 ABCD で挟みます。
台形 APQD、斜線部、台形 ABCD の面積をそれぞれ S1, S2, S3 とおくと、図より明らかに S1＜S2＜S3 が成り立ちます。
中点連結定義を用いて S1, S2 の面積を計算すると以下のようになります。

S1=$\frac{AP+DQ}{2}$・AD=MN・AD=$\frac{2x}{a}$
S2=$\frac{AB+DC}{2}$・AD=x$\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$

以上より題意の不等式が証明されます。

(2)
(1)より$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt$=log2 になる a＋x, a－x を見つけて、不等式を挟めば証明されることがわかります。
$\int\frac{1}{t}dt$=logt＋C (C は積分定数)から log2 をつくる一番簡単な積分の式は$\int_{1}^{2}\frac{1}{t}dt$であることが容易に想像できます。
a＋x=2, a－x=1 を連立すると a=$\frac{3}{2}$となります。
これを(1)の不等式に代入すると、$\frac{2}{3}$＜log2＜$\frac{3}{4}$となりますが、0.666…＜log2＜0.75 となってしまい、問題文の 0.68＜log2＜0.71 より甘い不等式となり、題意を満たしません。
そこで、もっと不等式を挟む値を細かい値にすることで詳細な評価をします。

log2=$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{t}dt$と分けて考えると、$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt$のほうは a=$\frac{5}{4}$, x=$\frac{1}{4}$、$\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{t}dt$のほうは a=$\frac{7}{4}$, x=$\frac{1}{4}$になります。
これを(1)の不等式に代入すると
log2＞$\frac{4}{5}$・$\frac{1}{2}$＋$\frac{4}{7}$・$\frac{1}{2}$ ＝$\frac{24}{35}$ =0.685…
log2＜$\frac{1}{4}$・($\frac{2}{3}$＋1)＋$\frac{1}{4}$・($\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$)=0.708…
になり、問題文の 0.68＜log2＜0.71 を満たし、題意の不等式が証明されます。