

Q. (数3標準問題集 p152 例題 65(2))

x の範囲が $0 \leq x \leq 1/4$ と $-2 \leq x \leq 1/4$ に分けられていますが、どうやって調べるのですか？

A.

$-2 \leq x \leq 0$ の範囲 (y 軸よりも左側) では一つの x に対応する y は一つに定まります。

一方、 $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ の範囲 (y 軸よりも右側) では一つの x に対し y が2つ対応するため、

面積を求めるには上側にある y_2 を積分したのから下側にある y_1 を積分したものを引かなければなりません。そのため、 y 軸を境にまず2つの範囲に分けています。

152 ページ下部の式を分かりやすく書くと、

$$\frac{S}{2} = (\text{y軸の左側}) + (\text{y軸の右側})$$

$$= \int_{-2}^0 y_2 dx + \left(\int_0^{\frac{1}{4}} y_2 dx - \int_0^{\frac{1}{4}} y_1 dx \right)$$

y_1, y_2 をそれぞれまとめて積分して、

$$= \int_{-2}^{\frac{1}{4}} y_2 dx - \int_0^{\frac{1}{4}} y_1 dx$$

となります。

次に、ここから積分する変数を x から t に変えていきます。

(1) で求めた媒介変数を使います。定積分の始点、終点の x についてそれぞれ対応する t を調べます。

$x = (1 - \cos t)\cos t$ より、 $x = -2, 0, \frac{1}{4}$ をそれぞれ代入して解くと

① $x = -2$ のとき、 $(\cos t - 2)(\cos t + 1) = 0$ となり、 $\cos t = -1$ から $t = \pi$

② $x = 0$ のとき、 $(\cos t - 1)\cos t = 0$ となり、 $\cos t = 1, 0$

$x = 0$ で y は y_1 と y_2 の2つ対応するので

②-1 $(x, y) = (0, y_2)$ のとき

$y_2 \neq 0$ であることを考えると、 $y = (1 - \cos t)\sin t$ の式より $\cos t \neq 1$ なので、 $\cos t = 0$

②-2 $(x, y) = (0, y_1) = (0, 0)$ のとき

②-1 のときに $\cos t = 0$ だったので、こちらは $\cos t = 1$

これは $y = (1 - \cos t)\sin t = 0$ も満たします。よって、 $t = 0$

③ $x = \frac{1}{4}$ のとき、 $(2\cos t - 1)^2 = 0$ となり、 $\cos t = \frac{1}{2}$ よって $t = \frac{\pi}{3}$

基本的には曲線の描かれる軌道に沿って t の値が連続的に変化していくように、 x と t を対応させます。上に書いたように三角関数を解く方法で求めてもよいのですが、曲線を描くのに使う増減表を使うと分かりやすくなります。 x 軸より上方にある半分のみを求めると、 t は $0 \leq t \leq \pi$ で考えます。増減表を使えば、同じ $y = 0$ でも 2 点对応しているのがわかりやすいと思います。

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
dx/dt	0	+	0	-	-	-	0
x	0	\rightarrow	$\frac{1}{4}$	\leftarrow	$-\frac{3}{4}$	\leftarrow	-2
dy/dt	0	+	+	+	0	-	0
y	0	\uparrow	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	\uparrow	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\downarrow	0
(x,y)	(0,0)	\nearrow	$(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$	\nwarrow	$(-\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$	\swarrow	(-2,0)