Ｑ．（数学 1A 標準問題精講　例題 97）
解説の補助をお願いします。
（問題）
定点 O を中心とする半径 r の円 C と，円 C の外に定点 P がある．点 P を通る直線が円 C と 2 点 A,B で交わり，さらに A,B における接線が点 Q で交わっているものとする．点 Q から直線 OP に下ろした垂線の足を H とする．

⑴　点 H は中心 O とは異なることを証明せよ．

⑵　５点 Q,A,H,O,B は同一円周上にあることを証明せよ．

⑶　$PH \cdot PO = PO^2 - r^2$ が成り立つことを証明せよ．

⑷　直線 QH 上の円 C の外にあるどの点から円 C に 2 本の接線を引いても，その接点 R,S を通る直線は必ず点 P を通ることを示せ．

Ａ．

⑴

点 H が中心 O と一致する，と仮定したら，$QO \perp PO$ となるので，線分 AB は点 O を通ることから円 C の直径となるが，円の直径の両端におけるその円の接線同士は平行になり，交点を持たないので矛盾が生じる．
従って，点 H が中心 O と一致することはない．

⑵

線分 QA,QB は円 C の接線であるので，$\angle OAQ = \angle OBQ = 90°$
また，点 H の定め方より，$\angle OHQ = 90°$
以上のことから，円周角の定理の逆より，３点 A,B,H は線分 OQ を直径とする円の円周上にあることがわかる．
従って，５点 Q,A,H,O,B は同一円周上にある．

⑶

円 C と直線 OP の交点を D，E とおく．
⑵の結果より，方べきの定理から，$PH \cdot PO = PA \cdot PB$
また円 C において，方べきの定理から，$PA \cdot PB = PD \cdot PE$
ゆえに，$PH \cdot PO = PD \cdot PE$ が成立，
ここで，D,E の定め方から，$PD = PO - r$，$PE = PO + r$ なので，これを代入し，

$PH \cdot PO = PO^2 - r^2$が示される．

⑷

直線 QH 上の，円 C の外に，Q と異なる点 T をとる．
T から円 C に引いた２接線の，円 C との交点をそれぞれ R，S と置いた時，直線 RS と直線 OH の交点が，点 T の取り方によらず，常に P と一致することを示せば，示すべき命題は証明される．
ここで，直線 RS と直線 OH の交点を P_1 とする．

⑴～⑶において，点 Q を点 T，点 A を点 R，点 B を点 S として考えると，同様の議論から，
$P_1H \cdot P_1O = P_1O^2 - r^2$
これを変形すると，
$(OP_1 - OH) \cdot P_1O = P_1O^2 - r^2$
$\Leftrightarrow$ $OH \cdot P_1O = r^2$…①

⑶の結果より
$PH \cdot PO = PO^2 - r^2$
これを変形すると，
$(OP - OH) \cdot PO = PO^2 - r^2$
$\Leftrightarrow$ $OH \cdot PO = r^2$…②

①②より，$OP = OP_1$
ここで，点 P_1 はその取り方から，線分 QH に関して点 P と同じ側にあることがいえるので，点 P と点 P_1 は一致する．

以上のことから，直線 RS は，常に点 P を通ることが証明された．