

Q. (標準問題精講 2B 例題 107)

解説の補助をお願いします。

A.

この問題においてガラス棒の底面の半径を  $x$ 、高さは  $y$  とすると、 $V = \pi x^2 y$  とすることができるとわかる。ここで、 $x \leq b$  については高さ  $h = y$  となる。すると  $V = \pi x^2 h$  となる。 $x = b$  で最大となるので、 $x \leq b$  では  $V = \pi b^2 h$  で最大となる。

一方  $b \leq x$  については p241 の下の図のようになる。ここで大切なのが、 $V$  を  $x$  か  $y$  の式で表せるようにすることである。 $x$  か  $y$  だけ表せれば、片方が変数だと考えて動かして、最大値が求まると考える。(2変数の最大値を求めるのは難しい) $x = a$  と  $b$  と  $y$  の式にするために相似を利用している。相似を考えると、

$y = \frac{a-x}{a-b} h$  と置ける。よって  $V = \pi x^2 \frac{a-x}{a-b} h$  となりこの最大値を考える。 $\pi x^2 \frac{a-x}{a-b} h = f(x)$  とおく。すると以下のように場合分けして増減表になる。

i  $b \geq \frac{2a}{3}$  のとき

$x$	$b$	
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\pi b^2 h$	$\searrow \square$

ii  $b \leq \frac{2a}{3}$  のとき

$x$	$b$		$\frac{2}{3}a$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow \square$	$\frac{4}{27} \frac{a^3}{a-b} h$	$\searrow \square$

よって  $\frac{3}{2} \geq \frac{a}{b}$  のとき  $x = \frac{2a}{3}$   $1 < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$  のとき  $x = b$