Q．（標準問題精講３　P. 169 例題 73）
解説の補助をお願いします（特に、非回転体の体積はどこで切ればいいのかについて）。

A．基本的にいずれかの軸に直交する平面で切って、出てきた断面積をその軸について積分していきます。軸の選び方によって計算の楽さにかなり差が出てくるので、どの軸方向に切ったら単純な断面が出てくるかを考えます。
本問の場合、
ｘ軸に直交（ｘ＝ｔで切る）⇒放物線
ｙ軸に直交（ｙ＝ｔで切る）⇒放物線
ｚ軸に直交（ｚ＝ｔで切る）⇒楕円
となります。
また、単純な断面でも積分する軸の座標に合わせて面積を求めるのが大変だと意味がありません。ｘ軸に直交する平面で切るということは、x=t のときの断面積を S(t)=(t の関数)とおいて、t を x 軸に沿って積分していくわけです。この「x=t のときの断面積を S(t)=(t の関数)で表す」作業がなるべく簡単で、この t の関数が積分しやすい関数であることを確認してください。

解答はｘ＝ｔで切る方法で解いています。
x=t を $z=1-x^2$に代入して、放物線Ａと面 x=t との交点の z 座標が $z=1-t^2$とわかりました。
切って出てきた断面の放物線において、これが頂点の座標になります。
放物線Ｂを元の図形としているため、断面の放物線の式の基本形は $z=1-2y^2$となります。ここから平行移動したことを考慮して、断面の放物線の式を実際に求めていきます。Ｂと比較して頂点の z 座標が $1\to 1-t^2$になっていることを考慮すると、
ｘ=t で切ったときの断面の放物線の式は $z=1-2y^2 \to$ **$z=(1-t^2)-2y^2$** となります。
断面図は解答の通りで、この放物線と y 軸との交点は $z=(1-t^2)-2y^2$に z=0 を代入して解いて $y=\pm\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$となります。値が煩雑なので、$\pm\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$として最後に代入します。
断面積 S(t)は放物線の式を$-\alpha$から$+\alpha$まで y 軸方向に積分して

$$S(t)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\{(1-t^2)-2y^2\}dy$$

$$=2\int_0^{\alpha}(-2y^2+1-t^2)dy$$

偶関数の性質を利用

$$=2\left[-\frac{2}{3}y^3+(1-t^2)y\right]_0^{\alpha}$$

$$=-\frac{4}{3}\alpha^3+2(1-t^2)\alpha$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}\right)^3+2(1-t^2)\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$$

$\alpha=\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$を代入

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{1-\mathrm{t}^2}\right)^3$

ここで、やっと x=t のときの断面積を S(t)で表す作業が終わりました。
次に、このＳ(t)をｘ軸方向に積分していきます。動かす t の範囲は-1≦t≦1 です。

$\mathrm{V}=\int_{-1}^{1} S(t)\,dt$

$=\int_{-1}^{1} \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{1-\mathrm{t}^2}\right)^3 dt$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-\mathrm{t}^2}\right)^3 dt$

偶関数の性質を利用

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2\int_{0}^{1}\left(\sqrt{1-\mathrm{t}^2}\right)^3 dt$

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{1}\left(\sqrt{1-\mathrm{t}^2}\right)^3 dt$

t=sin θ とおくと、t：0→1 のとき θ ：0→$\frac{\pi}{2}$　、dt=cos θ d θ より

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)^3 cos\theta\, d\theta$

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cos^2\theta}\right)^3 cos\theta\, d\theta$

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^3 cos\theta\, d\theta$

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{cos2\theta+1}{2}\right)^2 d\theta$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 2\theta+2cos2\theta+1)\,d\theta$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{cos4\theta+1}{2}+2cos2\theta+1)\,d\theta$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{cos4\theta}{2}+2cos2\theta+\frac{3}{2})\,d\theta$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{sin4\theta}{8}+sin4\theta+\frac{3}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

普通に計算すると倍角が何度も出てきて非常に面倒なので、

解答のように$\sin^n x$の定積分の公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$
$$= \frac{\mathrm{n}-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot,,,\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \qquad \text{(n が奇数のとき)}$$
$$= \frac{\mathrm{n}-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot,,,\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{(n が偶数のとき)}$$

を利用しましょう。

【研究】にあるように、z=t で切っても解くことができます。

こちらは、x＝t で切るときと比較して

断面の式（楕円）を導く作業が放物線のときよりもやや複雑ですが、その後の S(t)を求める計算は簡単で、更にＳ(t)を積分するのも単純な式になっています。

断面の形で目途をつけて軸を決めますが、もし実際に計算してみてどうしても立式や計算に行き詰まったら、切る軸を変えてみて答えにたどり着けるようにしましょう。