

Q. (数ⅡB標準問題精講 p172 演習問題 75-2)

解法の流れとして、 $\sin x = X$  と置いたとき、 $0 \leq x \leq \pi$  だから  $0 \leq X \leq 1$  の中でただ一つの解を求める条件を調べると思いますが、解答ではなぜいきなり  $X=1$  のとき不適だというのが分かるのでしょうか。

A.

この問題は、問題文にある通り  $x$  が異なる 2 つの解を持つための  $a$  の条件を求める問題です。

解き方として三角関数のままだと方程式として扱いにくいので、三角関数を  $\sin x = X$  のように  $X$  で置き換えることが必要になってきます。

この置き換えにおいて、 $x$  の解の個数と  $X$  の解の個数は必ずしも一致しないことが非常に大切になります。

例えば  $X$  の解が一つで  $1/2$  であれば、それに対応する  $x$  は  $\pi/6$  と  $5\pi/6$  の二つになります。

このように考えてみると、 $0 \sim 1$  のほとんどで  $X$  1 つに対して  $x$  2 つとなります。

$x$  が異なる 2 つの解をもてばよいので、 $X$  がただ一つの解も持てばよいこととなります。

ただし、例外があってそれが  $X = 1$  の時です。

$X = 1$  の時は対応する  $x$  が  $x = \pi/2$  だけで、 $X$  1 つに対して  $x$  も 1 つです。

なので、 $x$  が異なる 2 つの解を持つためには、 $X$  も異なる 2 つの解を持つ必要があります。

しかし、 $X = 1$  以外のもう一つの解は対応する  $x$  が 2 つあるので、結果的に  $x$  の解が 3 つできてしまって条件を満たしません。よって  $X = 1$  の時は不適ということができます。

よって、 $X$  の解が  $X = 1$  以外でただ一つの解を持つ条件を求めればよいこととなります。