

Q. (標準問題精講 2B 標問 6)

解説の補助をお願いします。

[回答者の頭の中]

恒等式とは等式すなわち等号(=)を含む数式であって、そこに現れるあらゆる変数がどのような値にあっても、常に等号で結ばれた左右二つの数式の“値”が等しいもの。つまり $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6 \cdots$ のどれを代入しても左右の式の値が同じになるということである。今回変数は x しか出てこないの、その x に任意の値を代入すると、左と右は同じ値になる。言い換えると、左辺= $g(x)$ 、右辺= $h(x)$ とすると $g(x)=h(x)$ になるはずなので、 $g(x)-h(x)=0$ がどんな x でも成り立つといえる。

[解説]

(1)

$f(0)$ や $f(1)$ や $f(-1)$ といった式の値を求めることを考えたとき、とりあえず与えられた恒等式の x に何かを入れて実験してみるとよい。たとえば $x=0$ のとき、 $-5f(0)=f(-1)+2f(1)-29$ となる。

ここで $f()$ のなかの値が $-1, 0, 1$ となった。このことから、 $x=0$ のように $f()$ 中の値が $-1, 1, 0$ となるような x を代入していけば、 $f(-1), f(0), f(1)$ が求められそうだと気付く。 $f()$ の中身は、 $x^2-1, x-1, x+1$ なので、このいずれかを 0 にすることを考えると見当が立てやすい。よって、今回は $x=1, -1$ を代入し、 $f(0)+5f(1)=33$ 、 $f(0)+f(-1)=5$ となった。

ここで $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(-1)$ といった項が出そろったら、これらを未知数として扱って三元一次方程式を解いていく。そのために x を三種類代入して、三本の式を用意した。方程式を解く際は、 $f(x^2-1)$ や $f(x-1)$ や $f(x+1)$ などに付いている係数についても注目する必要がある。

$$x=0 \text{ のときの } 5f(0)=f(-1)+2f(1)-29$$

$$x=1 \text{ のときの } f(0)+5f(1)=33$$

$$x=-1 \text{ のときの } f(0)+f(-1)=5$$

これらを連立させて解くと、 $f(0)=3$ 、 $f(1)=6$ 、 $f(-1)=2$ が求められる。

(2)

[回答者の頭の中]でも話したように $f(x)$ や $f(x-1)$ や $f(x+1)$ の x に任意の値を代入しても、左と右は同じ式になると考えられる。よって次数も係数も左右で同じであると考えられる。

各項の次数は $f(x)$ の形だとわかりにくいですが、 $f()$ の中身の次数が大きければ大きいほど $f()$ の次数も大きくなることはわかる。たとえば、 $f(x)$ の最高次数を m とすると、 $f(x^2)$ はその二倍の次数になるから $f(x^2)$ の最高次数は $2m$ となる。

このことを頭におくと、左辺は $xf(x^2 - 1)$ 、右辺は $(x^3 + 1)f(x-1)$ にそれぞれ最高次数をもつ項が含まれることになる。

これらの最高次数どうしを比較すると、左辺は $1+2m$ 、右辺は $3+m$ となるので $1+2m=3+m$ を解いて $m=2$ と求まる。

(3)

$f(x)$ の最高次数は 2 とわかったので $f(x)=ax^2 + bx + c$ とおくことができる。

ここで x に 0, 1, -1 を代入し、(1)の $f(0)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(1)$ の値を使うと、 a 、 b 、 c が求まるので $f(x)$ がわかる。ここで確認して欲しいのは、左辺も右辺も全く同じ式になるということである。 $x=0$ を代入すると $f(0)=c$ となり c が求められるので、あとは a, b を求めるだけになり、楽ということも言える。

[ポイント]

この問題は、未知の整式 $f(x)$ を決定することがテーマです。

条件として $f(x)$ の次数が与えられている問題であれば、たとえば二次式なら

$f(x)=ax^2 + bx + c$ とおいて、 x に都合の良い値をいくつか代入したり与えられた条件式を使ったりすることで未知数 a, b, c に関する方程式を立て、それを解いて a, b, c を決定し $f(x)$ を求めるという流れです。このとき、未知数の数に応じた数の方程式を用意する必要があります。 x に代入する値は、のちの計算が楽になるように工夫して選びましょう。

本問では、 $f(x)$ の次数がそもそもわかっていませんでした。

この場合は、 $f(x)=ax^2 + bx + c$ の形でいきなり表すことができないので、まずは次数を決定するという作業が必要になります。**最高次数**を自然数 m とおいて、恒等式の左右で最高次数が等しくなるということから次数についての方程式を立てました。

整式の恒等式についての問題を解くうえで、非常に重要なテクニックなので覚えておきましょう。