

Q. (標準問題精講 3 例題 50)

解説の補助をお願いします。

A.

各小区間はとてつもなく細かく分割されているので、点 P は微小区間 $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ においてほぼ同速度で移動すると考えられる。 $t_{k-1} \leq s_k \leq t_k$ より、その速度は $f(s_k)$ とおけて、 t_{k-1} から t_k へと時間が経つとき、 $f(s_k)(t_k - t_{k-1})$ 移動する。

したがって $F(t)$ の定義より、

$$F(t_k) - F(t_{k-1}) \doteq f(s_k)(t_k - t_{k-1}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

これを $k=1, 2, \dots, n$ について辺々加えると、同じ色の斜線で示した部分が消えていき、

$$F(t_n) - \cancel{F(t_{n-1})} \doteq f(s_n)(t_n - t_{n-1})$$

$$\cancel{F(t_{n-1})} - \cancel{F(t_{n-2})} \doteq f(s_{n-1})(t_{n-1} - t_{n-2})$$

$$\cancel{F(t_{n-2})} - \cancel{F(t_{n-3})} \doteq f(s_{n-2})(t_{n-2} - t_{n-3})$$

...

$$\cancel{F(t_1)} - F(t_0) \doteq f(s_1)(t_1 - t_0)$$

より、

$$F(t_n) - F(t_0) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(s_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$F(b) - F(a) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(s_k)(t_k - t_{k-1}) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 n を無限大に近付けていくと、角微小区間の幅は 0 に近づき、点 P は微小区間 $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ において同速度 $f(s_k)$ で移動すると考えられ、 $\textcircled{1}$ の等号が成立する。よって $\textcircled{1}$ を足し合わせたものである $\textcircled{2}$ の等号も n を無限大に近付けたとき成立する。

したがって、

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(s_k)(t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

が示される。