Q．（標準問題精講３　標問 97）
解説の補助をお願いします。

問題

n を３以上の自然数とするとき次を示せ．ただし，$\alpha=cos\frac{2\pi}{n}+isin\frac{2\pi}{n}$　とし，ｉ を虚数単位とする．

⑴　$\alpha^{k}+\bar{\alpha}^{k}=2cos\frac{2k\pi}{n}$ (k は自然数)

⑵　$n=(1-\alpha)(1-\alpha^{2})\cdots(1-\alpha^{n-1})$

⑶　$\frac{n}{2^{n-1}}=sin\frac{\pi}{n}sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$

A．

⑴　ド・モアブルの定理より，$\alpha^{k}=cos\frac{2k\pi}{n}+isin\frac{2k\pi}{n}$

また，$\bar{\alpha}=cos\frac{2\pi}{n}-isin\frac{2\pi}{n}$　より，$\bar{\alpha}^{k}=cos\frac{2k\pi}{n}-isin\frac{2k\pi}{n}$

以上から，$\alpha^{k}+\bar{\alpha}^{k}=2cos\frac{2k\pi}{n}$

⑵　z を複素数とし，$z^{n}=1$ を考える．ここで，z は１の n 乗根であるから，$z=1, \alpha, \alpha^{2},$ $\cdots$ α^{n-1} である．
$z^{n}-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^{2}+z+1)$ と因数分解でき，
$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^{2}+z+1=0$ の解は $\alpha, \alpha^{2}, \cdots \alpha^{n-1}$ である．
ゆえに，
$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^{2}+z+1=(z-\alpha)(z-\alpha^{2})\cdots(z-\alpha^{n-1})$ が成立する．
ここに，z=1 を代入すると，
$1+1+\cdots+1=(1-\alpha)(1-\alpha^{2})\cdots(1-\alpha^{n-1})$
以上から，$n=(1-\alpha)(1-\alpha^{2})\cdots(1-\alpha^{n-1})$

⑶　$\frac{n}{2^{n-1}}=sin\frac{\pi}{n}sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$　を示すことを考える．

この両辺に，２の n-1 乗をかけ，

$n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$

$=(2\sin\frac{\pi}{n})(2\sin\frac{2\pi}{n})\cdots(2\sin\frac{n-1}{n}\pi)$ を示せば良い.

ここで，⑵の結果を用いると，

$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$

$=(2\sin\frac{\pi}{n})(2\sin\frac{2\pi}{n})\cdots(2\sin\frac{n-1}{n}\pi)$

を示せば良いとわかり，それぞれの項の絶対値を取り，各項の対応を考えると，ある自然数 $k(1\leqq k\leqq n-1)$ について，

$|1-\alpha^k|=|2\sin\frac{k\pi}{n}|$ …(※)を示せば良い.

ここで，$|1-\alpha^k|^2=(1-\alpha^k)(1+\bar{\alpha}^k)=1-(\alpha^k+\bar{\alpha}^k)+|\alpha|^{2k}$…①

α は 1 の乗根の 1 つだから，α の絶対値は 1 である.

これと，⑴の結果を①式に代入すると

$|1-\alpha^k|^2=2-2\cos\frac{2k\pi}{n}$…②

半角の公式より，$\frac{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}{2}=\sin^2\frac{k\pi}{n}$ なので②にこれを代入すると，

$|1-\alpha^k|^2=4\sin^2\frac{k\pi}{n}$

よって，$|1-\alpha^k|=2\sin\frac{k\pi}{n}$…③

ここで，$1\leqq k\leqq n-1$ なので，$\sin\frac{k\pi}{n}$ は正であり，$2\sin\frac{k\pi}{n}=|2\sin\frac{k\pi}{n}|$

これと③より(※)が成立することがわかり，示すべき等式が成立することが証明された.