

Q. (標準問題精講 2B P.340 例題 152)

解説の補助をお願いします。

A. ベクトルは計算や理論的にはそんなに難しくないため、「解答を読めばわかる」という問題も多いかと思います。大切なのは、なぜ解答のような式を立てる発想に至ったのか、どうしてこの作業をするのかというのを自分で思いついて説明できるようにしておくことです。

本問は基本的な定番問題ですが、かなり基礎の部分から詳しくに解説を書いたので「なぜその式を立てようと思ったか」「どうしてこの性質を利用することを思いついたのか」というポイントに注目して読んでみてください。

まず、「ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の 1 次結合として表せ」とは、求めたい点を P とすると実数 x, y, z を用いて $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ の形で表せということです。

(i) 内心 I

内心は角の二等分線どうしの交点なので、二等分線の性質を利用するという発想はすぐ浮かぶと思います。そのためには、まず三角形の一つの頂点から角の二等分線を引き、対辺まで延長してその交点を D とおきます。

D は二点 B, C を $l:n$ に内分する点であるので、内分点の公式を用いて

$$\overrightarrow{OD} = \frac{n\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC}}{l+n} \text{ となります。}$$

求めたい内心 I は AD を内分する点であることから、A I : I D

の比がわかればよいということになります。またここでも角の二等分線の性質を利用して、A I : I D = A B : B D なので、この比を求めるには B D の長さが必要になります。

先ほどの $B D : D C = l : n$ より $B D = m \times \frac{l}{l+n}$

よって $A I : I D = A B : B D = l : m \times \frac{l}{l+n} = (l+n) : m$ より

求めたい内心 I は AD を $(l+n):m$ に内分する点であるため、内分点の公式を用いて

$$\overrightarrow{OI} = \frac{m\overrightarrow{OA} + (l+n)\overrightarrow{OD}}{(l+n)+m} = \frac{m\overrightarrow{OA} + (l+n)\frac{n\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC}}{l+n}}{(l+n)+m} = \frac{m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC}}{m+n+l} \text{ となります。}$$

求めたいのは $\overrightarrow{OI}$ なのに解答の図中には点 O が登場せず、内分点の公式に代入するときに出てきました。(i) (iii) はこのパターンで、(ii) は実際に図形的に点 O をとって考えていくパターンです。二つの違いにも注目してください。

内心は、角の二等分線の性質を二度くりかえし利用して求めます。

今回の内心のように求めたい点が一段階で直接求められないときは、

基準となる点（今回はA）と求めたい点（I）を結ぶ直線が三角形の辺と交わる点（D）をまず求めてみるという作業が大切です。三角形の辺上についている点であれば、二つの頂点との比がわかれば表すことができるからです。

ベクトルの基本的な発想として、「わからない点は、座標がわかっている二点で挟む」というのがあります。座標がわかっている二点を結ぶ直線上の点は、その二点との比を用いて表せるからです。この方法で座標がわかる点を増やしていき、それらで最終的に求めたい点を挟むことで、答えを導くパターンの問題が多いです。

I がわからない→A、Dで挟みたい←Dがわからない←B，Cで挟める
というような流れです。

（ii）垂心

垂心が出てきたら、①直角 ②外接円 の二つの図形的性質を使うということを頭に浮かべます。

ここでは先ほどの内心のように辺の比が簡単に求められないため、「わかっている点で挟む」という発想は使えません。今回は、「求めたいベクトルに平行なベクトル（向きが同じベクトル）を求めて長さを実数倍する」、「座標がわからない点（H）を調べるには、基準点（O）からすでに座標が分かっている点（A）まで行き、そこからのベクトル（ $\overrightarrow{AH}$ ）」を足して求める」といった発想を使って解いていきます。

（i）と違って、内分点（外分点）の性質を使うわけではないので、実際に基準点Oを図上にとって求めていきます。

まず $\overrightarrow{AH}$ を求めたいのですが、直接は求められそうにありません。そこで図形的性質を利用して向きも長さも同じ $\overrightarrow{DB}$ を求めていきます。 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DB}$ になることは、「直角」と「外接円」を意識すれば気付きやすいかと思います。

次に $\overrightarrow{DB}$ を求めますが、平行なベクトルを探すという発想があれば、Mをとることで中点連結定理を使えて平行が作れるということに気付きやすいと思います。DCが直径なので、ちょうど円の中心であり基準点でもあるOを中点として利用できます。

よって $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OM}$ より、 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OM} = 2\left\{\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right\} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AH}$ が求められたので、これを利用して $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

求めたいベクトルが直接出せないときは、平行なベクトルを調べて長さを実数倍して調整するというのも一つの方法です。

（iii）重心

重心は三辺の中線の交点です。ちょうどBCの中点Mが求められているので、これを利用します。（iii）は基準点からGまでのベクトルを図的に考えるというよりは、（i）と同様

に内分点の公式を使って求めます。

$$G \text{ は } AM \text{ を } 2 : 1 \text{ に内分するので、} \overrightarrow{OG} = \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OM}}{2+1} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

重心は頂点側から頂点と中点を 2 : 1 に内分するという性質が浮かべば、公式に代入して簡単に解ける問題です。

三角形と内心・外心・垂心・重心に関連するベクトルの問題はよく出てきます。

今回の問題は基本問題なので、流れを覚えておきましょう。

これらの点を利用して、他の点のベクトルを求めるという問題もあります。

内心・・・比

外心・・・外接円

垂心・・・直角

重心・・・中点

など、関連が強く利用すべき図形的性質がすぐ頭に浮かぶようにしておきましょう。