

Q. (数学 標準問題精講 3 例題 88)

解説の補助をお願いします。

A.

なかなかとっつきづらい問題ですが、やるべきことをひとつずつやれば必ず解ける問題です。

まず (1) について。

最初に処理しなければいけないのは「 na/π を超えない最大の整数を m とする」という部分です。これは聞き覚えがあつてほしいところですが、ガウス記号の定義です。ただそれを知らなくても m を不等式として評価することはできるので、上下から m を挟みましょう。

ただ、このままだと行き詰ってしまいます。そこでこの不等式は m についてのものなので無理やり n について式変形します。すると $m\pi \leq na \leq (m+1)\pi$ となります。 na は求めるべき不等式の積分区間としてでてくるので有益そうな情報となりました。

ただ、またもやここから何をしてよいのか詰まってしまう。このように式をいじっていて行き詰ったときは、図に書いて視覚化してみることを習慣づけましょう。この考え方で僕は受験生時代どれだけ救われてきたかわかりません。それくらい大事な考え方です。今回も $|\sin x|$ のグラフを描いて求める面積を明らかにすると p 203 の図のようになり、図から確かに不等式が成り立っている！と気づくことができます。グラフという新たな視点から考えるだけですぐに答えに気付いてしまうことは多々あります。今回もその一種といえるでしょう。

次に (2) について。

積分の関数の中身が nx となっています。このように x ではないときには x に置換してより単純に考えることが大切です。置換積分すると、(1) の不等式が代入できるので代入してみます。すると $2m/n$ と $2(m/n+1/n)$ ではさめるので、この二つの極限值は一致していて、はさみうちの原理で求まるのだな、とわかります。

$1/n$ は明らかに 0 にとぶので、 m/n の極限を考えます。問題文に書かれた条件を一通り使ってしまったと思ったら、いままで導いた式の中でもう一度使えるものがないかを考えてみましょう。すると式①を両辺 n で割ることで、極限がはさみうちからわかります。

※今回のように (1) が証明問題の時は、(1) がわからなくても必ず (2) は解きましょう！！