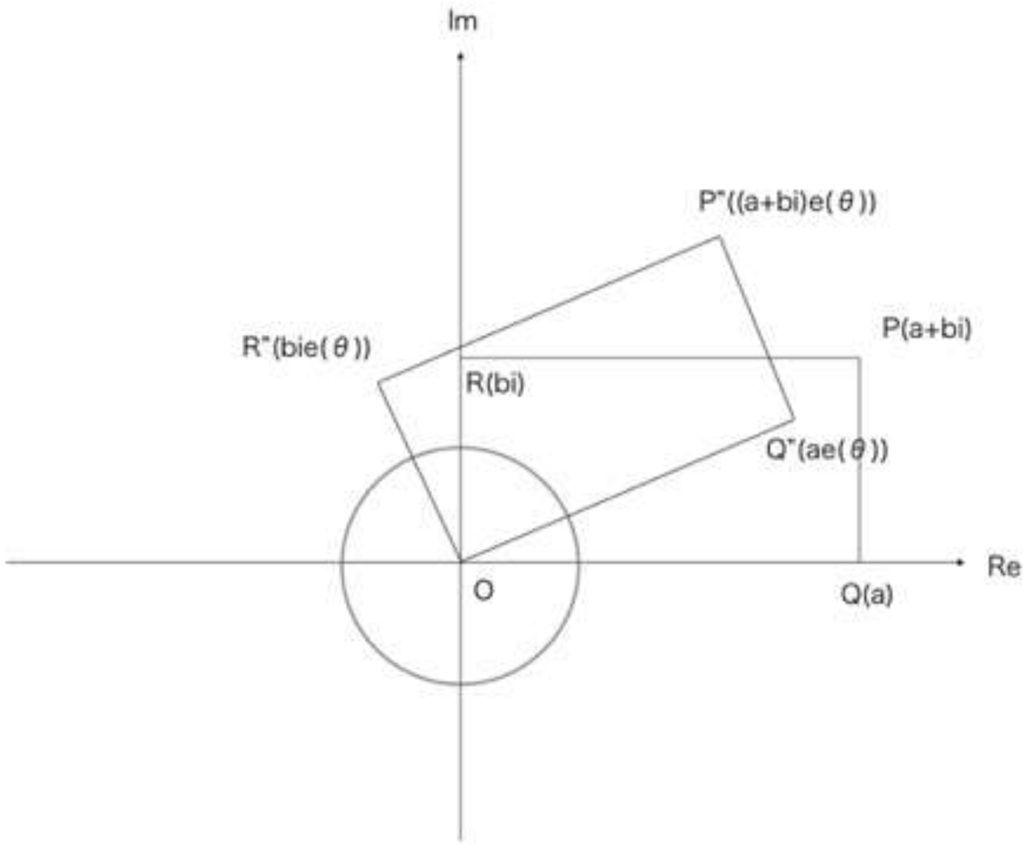
Q．(標準問題精講３　標問 94)
解説の補助をお願いします。

問題

$e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく．複素数 $z=a+bi$(a,b は実数)について次の各問いに答えよ．
⑴　点 iz は，点 z を原点 O を中心に$\frac{\pi}{2}$だけ回転した点であることを示せ.
⑵　点 $e(\theta)z$ は，点 z を原点 O を中心に θ だけ回転させた点であることを示せ.
⑶　⑵を用いて，正弦と余弦の加法定理を証明せよ.

A．
⑴　点 P(z)，Q(a)，R(bi)を考える.
点 Q を原点 O を中心に$\frac{\pi}{2}$だけ回転させると，点 Q'(ai)に，
点 R を原点 O を中心に$\frac{\pi}{2}$だけ回転させると，点 R'($-b$)にそれぞれり，
４点 OPQR で作られる長方形の回転を考えると，点 P は，点 P'($-b+ai$)に移ることがわかる.
ここで，$z=a+bi$ なので，$iz=-b+ai$
よって，点 iz，つまり点 P'は，点 z を原点 O を中心に$\frac{\pi}{2}$だけ回転した点であることが示された.

⑵
点 Q を原点 O 中心に θ 回転させた点を Q", 点 R を原点 O 中心に θ 回転させた点を R", とする.
ここで⑴の z を $e(\theta)$とすると, $ie(\theta)$は，$e(\theta)$を原点 O 中心に θ 回転させた点である.
これを元に下図を描く.



ここで，$e(\theta)$，$ie(\theta)$を単位ベクトルとしてとみてやると，

点 Q”の座標は $ae(\theta)$，点 R”の座標は $bie(\theta)$なる．

⑴と同様に長方形の回転を考えてやると，点 P は点 P”に移るので，

原点 O 中心の θ 回転により，点 P(z)は点 P”($e(\theta)z$)に移る．

以上のことは，a,b の正負によらず言える．（上図はともに正の場合．）

ゆえに, 点 $e(\theta)z$ は, 点 z を原点 O を中心に θ だけ回転した点であることが示された.

⑶

⑵より, $e(\beta)(e(\alpha)\cdot 1)$は, 点 1 を複素平面上で $\alpha+\beta$ 回転させた点であることがわかる.

つまり，$e(\beta)(e(\alpha)\cdot 1)=e(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$…①

この左辺を展開すると，

$$(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$
$$+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)\cdots②$$

ここで，①②の式を比較すると，$\cos(\alpha+\beta)$は実数であるので，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …③

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$ …④

が得られる．

③式は余弦の加法定理，④式は正弦の加法定理にそれぞれ他ならず，以上からそれぞれの加法定理は示された．