Q.(標準問題精講 2B P18 例題 4)
解説の補助をお願いします。

A.問題の式を見ると ${}_n\mathrm{C}_\circ$の和となっているので、二項定理を用いることは見当がつくと思います。二項定理の式

$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 \cdot a^n \cdot b^0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n \cdot a^0 \cdot b^n$

と問題の式と比較し、二項定理をどのように駆使するか考えることが大切です。

(1)

問題の式を見ると、係数($a^\circ b^\circ$にあたる部分)は全て 1 になっています。**係数が全て 1 のときは**
二項定理に a=1,b=1 が代入された形であることがすぐに思い浮かぶようにしましょう。二項定理の式に a=1,b=1 を代入すると

$(1+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 \cdot 1^n \cdot 1^0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1^1 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 1^0 \cdot 1^n$

赤字の部分は全て 1 なので、

$\Leftrightarrow 2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$ —①

となります。

問題の式と二項定理の式を見比べると、**(ⅰ)では偶数項が、(ⅱ)では奇数項が抜けていることが分かります。**二項定理を用いて偶数項、あるいは奇数項を消去すれば(ⅰ)の証明ができそうです。そこで、二項定理に a=1,b=-1 を代入した式を持ち出して連立させることを考えます。二項定理の式に a=1,b=-1 を代入すると

$(1-1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 \cdot 1^n \cdot (-1)^0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 1^{n-1} \cdot (-1)^1 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 1^{n-2} \cdot (-1)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot 1^1 \cdot (-1)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 1^0 \cdot (-1)^n$

赤字の部分は全て 1 です。また青字の部分は偶数乗のとき 1、奇数乗のとき-1 なので、**1,-1,1,-1,...と交互になります**。したがって

$\Leftrightarrow 0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} - {}_n\mathrm{C}_n$ —②

となります(最後の項が負であるのはnが奇数であるため)。

①から②を引けば偶数項は全て消え、奇数の項は全て 2 倍になります。

①－②より

$$
\begin{array}{rl}
 & 2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n \\
- & 0 \ = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + {}_nC_{n-1} - {}_nC_n \\
\hline
 & 2^n = 2 \cdot {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_3 + \cdots + 2 \cdot {}_nC_n \quad \text{―③}
\end{array}
$$

これを 2 で割ると、右辺が(ｉ)に等しくなります。

③÷2 より

$$2^{n-1} = {}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$$

∴(ｉ)の答えは

$${}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^{n-1}$$

(ｉ)式と(ⅱ)式を足し合わせると二項定理の式になっていますので、**二項定理の式から(ｉ)式を引く**ことで(ⅱ)の答えが得られます。

(二項定理の式)-((ｉ)式)より

$$
\begin{array}{rl}
 & 2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n \\
- & 2^{n-1} = \qquad {}_nC_1 \qquad + {}_nC_3 + \cdots \qquad + {}_nC_n \\
\hline
 & 2^{n-1} = {}_nC_0 \qquad + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1}
\end{array}
$$

∴(ⅱ)の答えは

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} = 2^{n-1}$$

(ｉ)式と(ⅱ)式で同じ値になっていることが分かります。

【参考】

組合せ C には以下の性質があります。

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

これを使って(ｉ)式を書き換えると

$${}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{n-2} + {}_nC_n$$

$$= {}_nC_{n-1} + {}_nC_{n-3} + \cdots + {}_nC_2 + {}_nC_0$$

これを右から左に並べると、

$$= {}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-3} + {}_nC_{n-1}$$

となって、(ⅱ)式と同じ式になりました。

つまり(ⅰ)と(ⅱ)が等しい値であることが分かります。この C の性質を利用して(ⅰ)と(ⅱ)の値を求めるという解法もあります。

(2)

(ⅰ)係数が変則的になっています。問題の式は、Σを用いると

$$1\cdot{}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+\cdots+n\cdot{}_nC_n=\sum_{r=1}^{n} r\cdot{}_nC_r$$

と表せます。**二項定理を用いることを考えれば、**${}_nC_r$ の前の**変数rを取り除く必要があります。**ここで、${}_nC_r$ を書き出すと

$${}_nC_r=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+2)\cdot(n-r+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(r-1)\cdot r}$$

となります。この分母のrと約分ができます。つまり

$$r\cdot{}_nC_r=r\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+2)\cdot(n-r+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(r-1)\cdot r}$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+2)\cdot(n-r+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(r-1)}$$

二項定理を使いたいので、これを再び組合せ C で表す必要があります。青い部分に注目すると、${}_{n-1}C_{r-1}$ の形になっています。

$$r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}\quad —(*)$$

これより、問題の式は

$$\sum_{r=1}^{n} r\cdot{}_nC_r=\sum_{r=1}^{n} n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$$

$$=n\sum_{r=1}^{n}\ {}_{n-1}C_{r-1}\quad\leftarrow(\because n\text{は定数})$$

Σを具体的に書き出すと、

$$=n\{{}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}\}$$

{}内が二項定理の形になっています。ただし n ではなく(n-1)になっていることに注意して

$$=n(1+1)^{n-1}$$

$$=n\cdot2^{n-1}$$

(ⅱ)

(ⅰ)と同じように考えます。問題の式はΣを用いると

$$1\cdot2\cdot{}_nC_1+2\cdot3\cdot{}_nC_2+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot{}_nC_n=\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdot{}_nC_r$$

と表せます。(ⅰ)と同じく、**二項定理を用いるためには変数である$r(r+1)$を消**

去する必要があります。
(ⅰ)で導き出した(*)式を利用して(ⅱ)を書き換えると

$$r(r+1)\cdot{}_{n}C_{r}=r\cdot{}_{n}C_{r}\cdot(r+1)$$
$$=(r+1)\cdot n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}\quad —①$$

ここで、(*)式の$\boldsymbol{n}$を$\boldsymbol{n-1}$に、$\boldsymbol{r}$を$\boldsymbol{r-1}$に書き換えた式

$$\boldsymbol{(r-1)\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\cdot{}_{n-2}C_{r-2}}\quad —(**)$$

を利用することを考えます。
${}_{n-2}C_{r-2}$の$r-2$という部分から、r ≧ 2である必要があります。では$r=1$はどのように変形されるのか確かめておきます。
$(r-1)\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$に$r=1$を代入すると、0 となります。つまり、**$\boldsymbol{r=1}$のときを考える必要がありません**ので、$r\geqq 2$で考えてよいことが分かります。

さて、(**)式を利用するためには係数が$(r-1)$である必要がありますので、
$r+1=r-1+2$として、**$\boldsymbol{r-1}$を作ります。**
これより、①式は

$$n\cdot(r+1)\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot(r-1+2)\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$$
$$=n\{(r-1)\cdot{}_{n-1}C_{r-1}+2\cdot{}_{n-1}C_{r-1}\}$$

波線部で(**)式を利用して

$$=n\{(n-1)\cdot{}_{n-2}C_{r-2}+2\cdot{}_{n-1}C_{r-1}\}$$

となります。ただし、**波線部は$\boldsymbol{2\leqq r\leqq n}$、それ以外は$\boldsymbol{1\leqq r\leqq n}$の範囲で考える**ことに注意します。以上より、(ⅱ)の式は

$$1\cdot2\cdot{}_{n}C_{1}+2\cdot3\cdot{}_{n}C_{2}+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot{}_{n}C_{n}=\sum_{r=1}^{n}r(r+1)\cdot{}_{n}C_{r}$$
$$=\sum_{r=1}^{n}n\{(n-1){}_{n-2}C_{r-2}+2\cdot{}_{n-1}C_{r-1}\}$$
$$=\sum_{r=2}^{n}n(n-1)\cdot{}_{n-2}C_{r-2}+\sum_{r=1}^{n}2n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$$
$$=n(n-1)\sum_{r=2}^{n}{}_{n-2}C_{r-2}+2n\sum_{r=1}^{n}{}_{n-1}C_{r-1}$$

Σを具体的に書き出すと、

$$=n(n-1)({}_{n-2}C_{0}+{}_{n-2}C_{1}+{}_{n-2}C_{2}+\cdots+{}_{n-2}C_{n-2})+2n({}_{n-1}C_{0}+{}_{n-1}C_{1}+{}_{n-1}C_{2}+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$$

それぞれに二項定理を当てはめると、2^{n-2}と2^{n-1}となるので、

$$=n(n-1)\cdot2^{n-2}+2n\cdot2^{n-1}$$

これを$n \cdot 2^{n-2}$でまとめ、整理します。

$$= \{(n-1) + 2 \cdot 2\} n \cdot 2^{n-2}$$

$$= (n+3) n \cdot 2^{n-2}$$

(1)と(2)ともに、二項定理を使うことを念頭に置きます。

(1)は基本的な問題なので、特に

$$\mathbf{(1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n}$$

はすぐに思い出せるようにしておきましょう。

(2)では**余計なもの(r や r+1)をどのように排除するか**を考えましょう。