

Q. (標準問題精講 2B 例題 104)

解説の補助をお願いします。

A.

この問題で注意しなければいけない点は $f(x)$ が a の変化によってどう変わるかということである。

また、絶対値のグラフは絶対値がない場合についてのグラフを書き、 $y < 0$ について $y = 0$ で折り返して考えるとわかりやすい。

まず p236 の下のように、 $g(x) = x^3 - 3a^2x$ とおく。 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	a
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	0	$\searrow \square$	$-2a^3$	$\nearrow \square$

x	0	a	$\sqrt[3]{3a^2}$	$2a$
$f'(x)$		+	0	-		+		+
$f(x)$	0	$\nearrow \square$	$2a^3$	$\searrow \square$	0	$\nearrow \square$	$2a^3$	$\nearrow \square$

これを折り返して見て考えると $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

このようになるので

場合分けを考えると、

(i) $2a \leq 1$ において

$x = a$ において最大である。

(ii) $a \leq 1 \leq 2a$ において

$f(a) < f(1)$ より、 $x = 1$ で最大である。

(iii) $1 \leq a$ において

$x = 1$ で最大である。

これをまとめると

(i) $M(a) = f(1) = g(1) = 1 - 3a^2$

(ii) $M(a) = f(a) = -g(a) = 2a^3$

(iii) $M(a) = f(1) = -g(1) = 3a^2 - 1$

$M(a)$ について $M(a)$ のグラフは p237 のようになり、最小にする a の値は $a = \frac{1}{2}$ と

わかる。