

Q. (標準問題精講 2B 例題 101)

解説の補助をお願いします。

A.

$0 \leq x \leq 1$  の中で、常に増加ということは  $0 \leq x \leq 1$  において  $f'(x) > 0$  ということである。  
 $f'(x) = 3(x - a)^2 + 3b - 3a^2$  となる。これが  $0 \leq x \leq 1$  において  $f'(x) > 0$  となるので、2 次関数の問題に変わってしまった。

(1) まず頂点の  $y$  座標つまり  $3b - 3a^2$  が 0 以上の時条件を満たす。

次に  $3b - 3a^2$  が 0 より小さいときについて考える。

(2)  $a \leq 0$  のとき  $f'(0) \geq 0$  を満たせばよい。

(3)  $0 \leq a \leq 1$  においては  $3b - 3a^2$  が 0 より小さいと条件を満たさない。

(4)  $a \geq 1$  においては  $f'(1) \geq 0$  において条件を満たす。

これらの条件をすべて揃えると

(1)  $3b - 3a^2 \geq 0$

(2)  $a \leq 0$  かつ  $3b - 3a^2 \leq 0$  かつ  $f'(0) \geq 0$  ( $b \geq 0$ )

(3)  $3b - 3a^2 \leq 0$  かつ  $0 \leq a \leq 1$  となる解はない

(4)  $1 \leq a$  かつ  $3b - 3a^2 \leq 0$  かつ  $f'(1) \geq 0$  ( $3 \cdot 6a + 3b \geq 0$ ) となる。これらを合わせると p230 の解答のような図となる。