

Q. (標準問題精講 3 p. 101 例題 43)

解説の補助をお願いします。

A. (1) $x > 0$ のときに、 $x - \log(1+x)$ と、 $\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ が正になることを示すだけです。

(2) 普通に計算することはできないので、なにかしらの工夫をして解きます。このときに、(1) で証明したことを生かせるのでは、と考えます。解き方に行き詰ったときは、前問を利用すると解けることがよくあります。

まず、 \log の中が積であるままではよくわからないので、 $\log\left\{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \dots \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)\right\} = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ と直してみます。

ここで、 $\log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ において $\frac{k}{n^2}$ を x になおすと (1) ででてくる $\log(1+x)$ になります。(←ここで、(1) に注目してこの変化に気づけるかがポイント)すると、はさみうちによって値を絞って計算することができます。