Q．（標準問題精講 2B　例題 127）
解説の補助をお願いします。

A．（１）
（ｉ）

等差数列の和Ｓは、$S=\frac{(項数)\times(初項+末項)}{2}$　の公式を用いて求めます。

条件から初項 a はわかっているのですが、「項数」と「末項」がわかりません。
まず、末項から調べます。a 以上 b 以下である整数からなる数列であるということから、末項は b に近い値になることが考えられます。そこで、交差が２という条件を使って末項を具体的に求めていきます。
なぜ解答のように a,b の偶奇によって場合分けするかというと、交差が２なので数列のすべての項で偶奇が一致するからです。初項が偶数から始まれば２ずつ増えていくので末項まですべて偶数、奇数から始まればすべて奇数となります。そのため初項 a のとき、b と偶奇が一致していれば末項が b、偶奇が一致していなければ b の一つ前の b-1 が末項ということになります。
末項が求められたので、これを利用して次に項数 n を考えていきます。ここでは等差数列の一般項の公式 $a_n=(初項)+(n-1)\times(交差)$ を使います。
a,b の偶奇が一致するとき、末項（第 n 項）は b でした。よって公式に代入して項数 n を求めると、$b=a+2(n-1)$　より　$n=\frac{b-a}{2}+1$　です。
同様にして、偶奇が一致しないときは末項が b-1 であることから、$n=\frac{b-1-a}{2}+1$　です。
ここで和の公式に代入する「項数」「初項」「末項」がすべて揃ったので、偶奇が一致する・しないときそれぞれについて公式に代入すればそれぞれのＳが求まります。

ポイントは a,b の偶奇が一致するかどうかによって場合分けすることに気付けるかどうかです。本問では交差が２のために偶奇で場合分けしましたが、例えば交差が３なら３で割った余りの数 0,1,2 によって３つに場合分けされます。つまり、交差の剰余類によって末項が場合分けされるのです。

（ⅱ）
ここからは整数問題になります。二つの場合それぞれのＳにＳ＝２５０を代入して、未知数 a,b の解が整数になるように不定方程式を解いていきます。
代入するとき、(b-a+2)(a+b)のようなかたまりを展開せずに、そのままの形で解いていくことが大切です。

まず、a,b で偶奇が一致するときを考えます。

(b-a+2)(a+b)= 1000 まで来たら、この右辺を$2^3 \cdot 5^3$の形に素因数分解します。

左辺は整数①×整数②の形で、それぞれの整数は２を０～３個、５を０～３個かけた数になるはずです。しかし、これだけの条件だと整数のパターンが（①、②）＝（１、１０００）（２、５００）、（４、２５０）、、、（１０００、１）とあまりにもたくさん存在してしまうので、さらに条件を絞る必要があります。

ここで a,b の偶奇の条件および大小関係を使います。

すると、偶奇が一致するときは（b-a+2,a+b）=(4,250),(10,100),(20,50)　の３つの組み合わせに絞られました。

※4 ≦b-a+2 の 4 は小さいほうの整数①の最小値を求めるためのものです。b,a は偶奇が一致していて交差が２であることから b-a の最小値は 2 で、そこに２を足して最小値は４となります。

ここで a,b の二元一次方程式になるので、それを解いて a,b の値が求まります。

偶奇が一致しない場合も同様です。

※こちらの 4 ≦b-a+1 の 4 は先ほどと少し求め方が異なります。こちらの場合は初項が a,末項が b-1 になり、a と b-1 の偶奇が一致していて交差が２であるため、(b-1)-a の最小値が２になります。よって b-a の最小値は３、そこに１を足して b-a+1 の最小値は４となります。

a,b を求めるときは偶奇で場合分けしますが、最終的に求めた解を書くときは解答のように分けずに大きいほう（または小さいほう）から並べて書けばＯＫです。

ポイントは、整数問題を解くための条件を自分で求められるかどうかです。このような問題では、問題文中に出てくる整数や大小の条件は常に頭におきながら解くようにしましょう。

（２）

連続する３つの項のみを扱う、（１）よりもシンプルな問題です。３連項が出てくる時は、等差中項を使います。

ポイント　**等差中項**

連続する a,b,c がこの順で等差数列のとき⇒2b=a+c

等比数列のとき⇒$b^2 = ac$

簡単に導けますが、単純な式なので覚えておくとよいと思います。

よって等差中項より、2b=a+c…①

条件より a+b+c=6…②、$a^2 + b^2 + c^2 = 44$…③

３つの未知数 a,b,c に対して、３本の方程式ができたのでこれを解いていきます。
①、②の一次式どうしを先にいじることで、b をまず求め、a,c どちらかを消去してから二次式に代入します。何本か方程式があるときは、単純な式を使って文字を整理していってから複雑な式に代入するというのが定石です。また、解が出てきたら、ここでも問題文中の条件を満たしているか確認するのを忘れないようにしましょう。

数列の問題では、今回の問題のように整数問題の知識も使って解くことがよくあります。別の範囲の知識も必要なことがあるので、きちんと復習しておきましょう。