

Q. (標準問題精講 2B p. 136 例題 62)

解説の補助をお願いします。

A. この問題は、点 P、Q 事態に注目して考えても解けません。「問題文の条件を満たす点 P、Q が存在するような x, y の条件」…①というように視点を変えて解きます。通過領域についての問題では、このように考えて解くとうまくいくことが多いので、解法をある程度覚えておきましょう。

まず、点 P、Q の座標をそれぞれ $P(p, 0)$ $Q(0, q)$ とおき、線分 PQ が三角形 OAB の面積を 2 等分するから、

計算して、 $pq = \frac{1}{2}$ …②になるころまではよいと思います。

さらに、いま求めたいのは線分 PQ が通る領域なので、とりあえず直線 PQ の方程式を出してみ、 $y = -\frac{q}{p}x + q$ …③となります。

このような問題に慣れていないとここで行き詰まるかと思いますが、①をふまえると、「 p, q が存在するような x, y の条件」について考えればよいということです。点 P、Q はそれぞれ辺 OA、OB 上の点なので、 $0 \leq p, q \leq 1$ …④ という隠れた条件があります。ただ、 p, q の 2 変数について同時に考えるのは複雑なので、②を③に代入することで p または q の 1 変数を扱うことにします。

解答では q について考えているので、これ以降 q を③式に残した(この式を⑥とする)として話を進めます。

④より、 $0 \leq q \leq 1$ という条件で考えていくのは、範囲が甘いです。②かつ④を考える

と $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$ …⑤から、⑤かつ⑥を満たす q が存在する x, y の値について考えます。これ

は、⑥を q の 2 次方程式とみることで、一般的な難易度の問題になります。