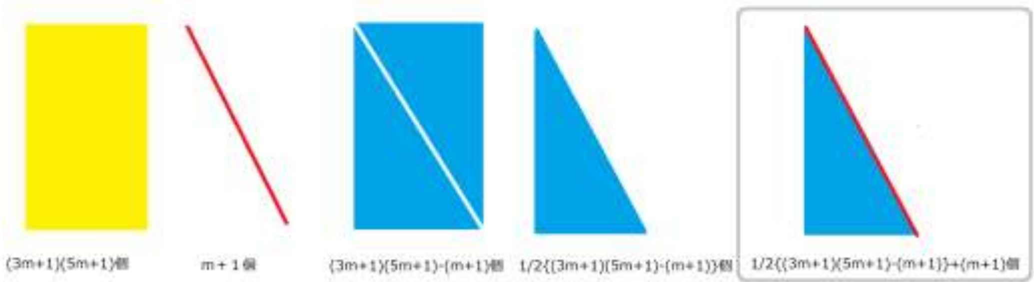
Q．（標準問題精講 2B　例題 135）
解説の補助をお願いします。

A．（1）
まずすべての不等式について不等号に＝がついているので、境界を含むということを押さえておきましょう。
次に、グラフを描いていきます。mが決まっていなくてわかりにくいですが、0以上の整数であることから、x切片・y切片ともに整数となるような直線になることがわかります。
通常の解き方（【研究】参照）だと、たとえばy軸に平行に切っていくとx座標が3の倍数になるときだけ直線$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=m$との交点も整数になるので、xを3の剰余類で場合分けしてそれぞれを足し合わせて、、、と大変面倒です。問題によっては切る方向を変えて、x軸に平行に切ることで簡単に解けるようになる場合もありますが、本問ではそれでも同様に面倒です。
そこで、解答のように「長方形内の格子点を考えてから二つに切って、更に境目の直線上に乗っている格子点だけを別個に考える」という方法をとります。
まず、直線$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=m$に乗っている格子点の数を数えます。
傾きが$-\frac{5}{3}$なので、y切片側から考えると(0,5m)からx軸方向に3進むごとに格子点が現れ、一番最後はx切片である(3m,0)です。よって、(0,5m),(3,5(m-1)),(6,5(m-2)),…,(3m,0)が直線上の格子点となります。x座標で考えると0から3mまで3ずつ動くことになるので$\frac{3m-0}{3}+1=m+1$個の点があることがわかりました。（※植木算の＋1に注意）
長方形全体ではx軸方向に1列3m+1個あり、それがy軸方向に5m+1列重なっていると考えると(3m+1)(5m+1)個の格子点があります。加えて直線上にm＋1個あることも考えると、次の図のようになります。



よって、求める範囲には

$$\frac{\{(3m+1)(5m+1)-(m+1)\}}{2}+(m+1)=\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)個$$

の格子点があることがわかりました。

（２）

続いて、３次元の格子点を考えます。

３次元の格子点の基本的な考え方としては､x-y 平面に平行な z=(整数) の面で切っていき、その平面に乗っている格子点の数を（１）を利用して求めます。それらを z 軸方向に足し合わせるイメージです。

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y \leqq n-z$と変形すると、$x \geqq 0, y \geqq 0$より、$0 \leqq n-z$、また$z \geqq 0$も考えて、

整数 z は z＝n,n-1,n-2,…,0 で動くということがわかります。

よって m=n-z とおくと、m は m=0,1,2,…,n で動くことになります。

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y \leqq m$とすると、m は０以上の整数であり他の条件も（１）と同じなので、（１）の結果を利用することができます。・・・★

よって z=n-m 平面上の格子点の数が$\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)$であることがわかりました。

あとは、z を z＝n,n-1,n-2,…,0 のすべてについて考えて、それらを足し合わせればよいので

ｍを 0,1,2,…,n で動かすと z が n,n-1,n-2,…,0 で対応することから

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)$$

$$=\frac{1}{2}(15\cdot 0+9\cdot 0+2)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\left\{\sum_{m=1}^{n}15m^2+\sum_{m=1}^{n}9m+\sum_{m=1}^{n}2\right\}$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{15}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{9}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2}{2}\mathrm{n}$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{9}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(\mathrm{n}+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\left\{\frac{15n(2n+1)}{6}+\frac{9}{2}n+2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\left\{\frac{5n(2n+1)+9n+4}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{10n^2+14n+4}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(5n^2+7n+2)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(5n+2)(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)^2(5n+2)$$

Σで変数の動く範囲が 1~n でないと公式が利用できないので

ｍ＝0~n を

ｍ＝0 とｍ＝1~n に分ける

(2)は二次元での結果を応用するところの発想（★のところ）が難しいですが、逆に言うと(1)を利用することを念頭において、そうなるように式変形すればよいです。

本問は格子点の基本的な考え方に加えて、格子点の問題によく登場する簡単に解くための

テクニックが多く含まれている問題です。格子点の考え方自体があやふやな人はもう少し基本の問題に戻って基本の解き方を完璧にしましょう。(※【研究】の解き方はセオリー通りの解き方です。)

基本的な格子点の問題を解くうえで注意すべきポイントとして
①境界の点を含めるかどうか
②縦切り(y 軸方向に切って x 座標を変化させる $y=f(x)$の形にして、x 方向に足し合わせる)
　横切り（x 軸方向に切って y 座標を変化させる $x=f(y)$の形にして y 方向に足し合わせる)
　のどちらで解くか
などがあります。②に関しては誘導の小問がある場合もあるので、そのときは流れにのればOKです。

以上の基本的なポイントを押さえたうえでこの問題を理解できれば、格子点の問題がより速くミスなく解けるようになると思います。