Q．（標準問題精講数 3 P238 標問 103 の研究）
解説の補助をお願いします。

A．まず非調和比の保存について説明します。非調和比とは、P236 標問 103 にあるλのことを指し、4 つの複素数から求められる値

$$\lambda = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

です。z_1からz_4の **4 つの値が決まれば求められる値**なので、

$$\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

と表します。
z_1からz_4に対してそれぞれ一次変換fをほどこすと、それぞれ$f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)$に移ります。したがって一次変換をした後の非調和比は、

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

と書けます。これが**一次変換前の非調和比と同じであること**、つまり

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

であることが**非調和比の保存**です。本当に非調和比が変わらないのか、実際に計算をして確かめてみましょう。

P232 研究 101 にあるように、一次変換fは一般に

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

と表せます。実際に$(az+b) \div (cz+d)$を計算します。

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az}{cz+d} + \frac{b}{cz+d}$$ ← 分子を分解しました

$$= \frac{\frac{a}{c}(cz+d-d)}{cz+d} + \frac{b}{cz+d}$$ ← $cz+d$の形を作るために赤字の操作をしました。

$$= \frac{\frac{a}{c}(cz+d)}{cz+d} + \frac{-\frac{ad}{c}+b}{cz+d}$$ ← 上の $-d$を右に分けました。

$$= \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad}{c}+b}{cz+d}$$ ← 左の項を$cz+d$で約分しました。

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$ ← 右の項の分子分母にcをかけました。

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$ ← 右の項の分母をc^2でくくりました。

したがって、

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$

となっています。この**一次変換fによってzがどのように変換されるのか**見てみましょう。

a,b,c,dはいずれも定数であるので、

$$\frac{bc-ad}{c^2}=\frac{1}{k}\quad ,\quad \frac{d}{c}=\beta$$

$\left(k,\beta:\text{複素数}\right)$と文字をおくと、

$$f(z)=\frac{a}{c}+\frac{1}{k(z+\beta)}$$

となります。これによって

1)$z\to z+\beta$　　(平行移動)

2)$z+\beta\to k(z+\beta)$　　(回転と拡大・縮小の合成)

3)$k(z+\beta)\to\frac{1}{k(z+\beta)}$

という**1)～3)の変換が、fによって一度になされている**ことが分かります(P233 では 1)～3)の変換が合成されていると言っています)。

では 1)～3)の変換を行ったときの非調和比$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$がどうなるか見てみましょう。

$\boxed{\text{1)の場合}}$

$\lambda_1=(z_1+\beta,z_2+\beta,z_3+\beta,z_4+\beta)$

見やすさのために、

$=(z_1',z_2',z_3',z_4')$と置くことにします。すると

$=\dfrac{(z_1'-z_3')(z_2'-z_4')}{(z_1'-z_4')(z_2'-z_3')}$　$\leftarrow$非調和比の式に代入します。

$=\dfrac{\{(z_1+\beta)-(z_3+\beta)\}\{(z_2+\beta)-(z_4+\beta)\}}{\{(z_1+\beta)-(z_4+\beta)\}\{(z_2+\beta)-(z_3+\beta)\}}$　$\leftarrow z'$を元に戻します。

$=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\lambda$

となって、λ_1はλと同じです。

$\boxed{\text{2)の場合}}$

ここでも、見やすさのために

$\lambda_2 = (z_1'', z_2'', z_3'', z_4'')$と置きます。すると

$= (kz_1', kz_2', kz_3', kz_4')$　$\leftarrow z + \beta = z'$としています。

$= \dfrac{(kz_1{}' - kz_3{}')(kz_2{}' - kz_4{}')}{(kz_1{}' - kz_4{}')(kz_2{}' - kz_3{}')}$　$\leftarrow$ 非調和比の式に代入します。

$= \dfrac{k(z_1{}' - z_3{}')k(z_2{}' - z_4{}')}{k(z_1{}' - z_4{}')k(z_2{}' - z_3{}')}$　$\leftarrow$ 各(　)内をkでくくりました。

$= \dfrac{(z_1{}' - z_3{}')(z_2{}' - z_4{}')}{(z_1{}' - z_4{}')(z_2{}' - z_3{}')} = (z_1', z_2', z_3', z_4') = \lambda_1$

となって、$\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$となります。

3)の場合

$\lambda_3 = \left(\dfrac{1}{z_1''}, \dfrac{1}{z_2''}, \dfrac{1}{z_3''}, \dfrac{1}{z_4''}\right)$　$\leftarrow k(z + \beta) = z''$としています。

$= \dfrac{\left(\dfrac{1}{z_1''} - \dfrac{1}{z_3''}\right)\left(\dfrac{1}{z_2''} - \dfrac{1}{z_4''}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1''} - \dfrac{1}{z_4''}\right)\left(\dfrac{1}{z_2''} - \dfrac{1}{z_3''}\right)}$　$\leftarrow$ 非調和比の式に代入します。

$= \dfrac{\left(\dfrac{z_3'' - z_1''}{z_1'' z_3''}\right)\left(\dfrac{z_4'' - z_2''}{z_2'' z_4''}\right)}{\left(\dfrac{z_4'' - z_1''}{z_1'' z_4''}\right)\left(\dfrac{z_3'' - z_2''}{z_2'' z_3''}\right)}$　$\leftarrow$ 各(　)内を通分しました。

$= \dfrac{\dfrac{(z_3'' - z_1'')(z_4'' - z_2'')}{z_1'' z_2'' z_3'' z_4''}}{\dfrac{(z_4'' - z_1'')(z_3'' - z_2'')}{z_1'' z_2'' z_3'' z_4''}}$

$= \dfrac{(z_3'' - z_1'')(z_4'' - z_2'')}{(z_4'' - z_1'')(z_3'' - z_2'')}$　$\leftarrow$ 分子分母に$z_1'' z_2'' z_3'' z_4''$をかけました。

$= \dfrac{\{-(z_1'' - z_3'')\}\{-(z_2'' - z_4'')\}}{\{-(z_1'' - z_4'')\}\{-(z_2'' - z_3'')\}}$　$\leftarrow$ 各(　)内を-1でくくりました。

$= \dfrac{(z_1'' - z_3'')(z_2'' - z_4'')}{(z_1'' - z_4'')(z_2'' - z_3'')} = (z_1'', z_2'', z_3'', z_4'') = \lambda_2$

以上より、$\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$となりました。

λ_3はzをfで一次変換した後の非調和比ですから、結局

$$\lambda_3 = \big(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$$

つまり、**一次変換をほどこしても非調和比は一次変換前と同じ値である**ことが分かりま

した。テキストではこのことを「非調和比の保存」と言っています。

具体的に問題を解く上でどのように利用できるのか、演習 103(1)を解説することにします。

演習問題では、**任意の直線$\boldsymbol{l}$上にある複素数$\boldsymbol{z_1, z_2, z_3, z_4}$の非調和比$\boldsymbol{\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)}$が実数であることを示す**ことになります。

ここで、上で述べた「①一次変換における非調和比の保存」と「②円々対応(一次変換は円を円に、直線を直線に移すという意味)であること」の 2 つを利用します。

①一次変換における非調和比の保存

任意の直線$\boldsymbol{l}$上にある$\boldsymbol{z_1, z_2, z_3, z}$をそれぞれ$\boldsymbol{0, 1, 2, w}$に移すような一次変換$\boldsymbol{f}$を考えます。

このとき非調和比は、変換前と後で変わらない(非調和比の保存)ので

$$(z_1, z_2, z_3, z) = (0,1,2,w) \quad —①$$

という関係があります。

(z_1, z_2, z_3, z)の具体的な値は分かりませんが、**$(\boldsymbol{0, 1, 2, w})$だったらある程度具体的な値が把握でき、①の関係から間接的に$(\boldsymbol{z_1, z_2, z_3, z_4})$が求められます。いま、実数であることを示したいため、非調和比が実数になるように 0,1,2 に移した**ということです。

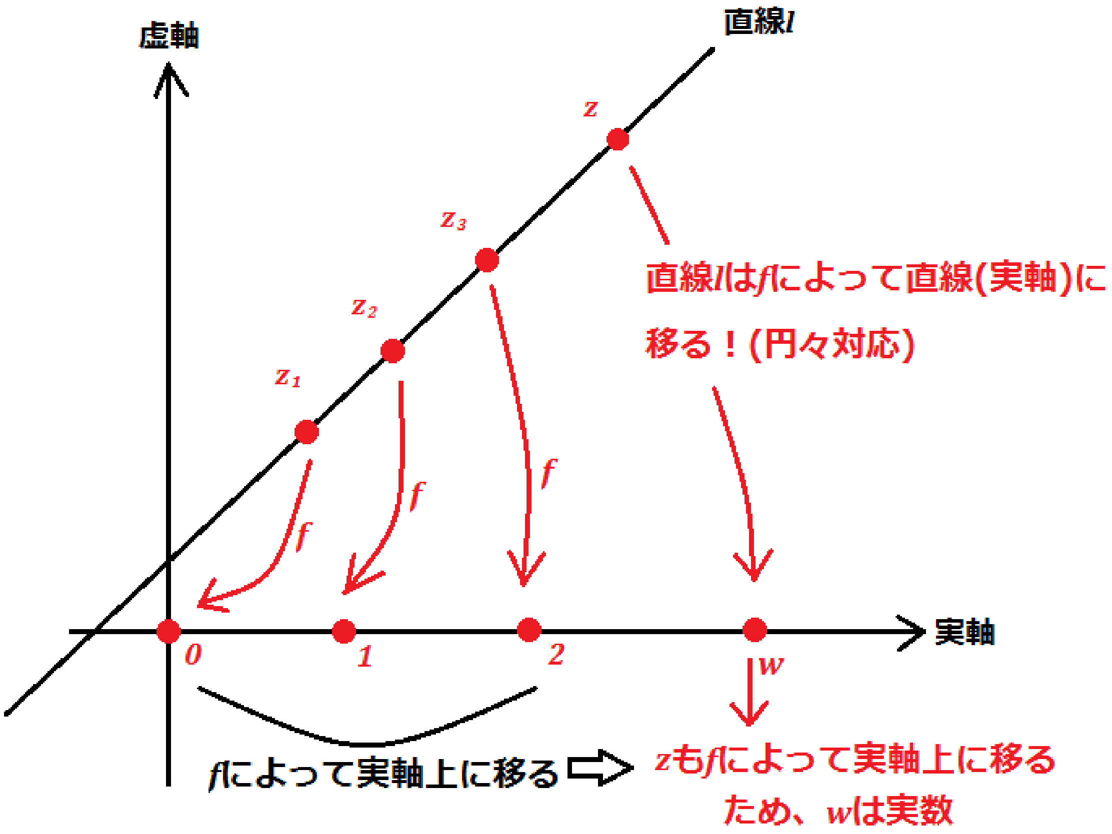
では、$(0,1,2,w)$を実際に求めてみましょう。

$$(0,1,2,w) = \frac{(0-2)(1-w)}{(0-w)(1-2)} = \frac{-2(1-w)}{-w(1-2)} = \frac{2(w-1)}{w}$$

もし$\boldsymbol{w}$が実数であれば、非調和比$(0,1,2,w)$が実数と分かり、①の関係から(z_1, z_2, z_3, z)も実数であるため、題意が満たされます。

wが実数となることを示すために、円々対応を利用します。

②円々対応(一次変換によって円は円に、直線は直線に移る)



直線lが0,1,2(つまり実軸という直線)に移ると仮定しました。直線に対して一次変換を行うと、直線に移るので、**直線l上のzも、実軸上に移ります。**実軸上の値は実数なので、wは実数であることが分かります。
これより、

$$(0,1,2,w)=\frac{2(w-1)}{w}=(\text{実数})\quad \text{—②}$$

です。

以上より①②から、$(z_1,z_2,z_3,z)=(0,1,2,w)=(\text{実数})$が示せました。