

Q. (標準問題精講 2B 例題 80)

解説の補助をお願いします (特に式の変形について)。

$$A. \quad a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = k$$

と、おく。

このように分数式が 2 つ以上の等号によって結ばれていたら、なにかしらの文字で置き換えるとスムーズに問題が解けることが多いです。

示したい不等式のうち、まず $b+c>a$ を示す。

$$b+c-a$$

$$=k(\sin B + \sin C - \sin A)$$

$$=k\{\sin B + \sin C - \sin(B+C)\}$$

(ここは、 $A = \pi - (B+C)$ より、 $\sin A = \sin(\pi - (B+C)) = \sin(B+C)$ という変形を行っています。A を消去して、B と C でと統一する意図での変形です。)

$$=k(\sin B + \sin C - \sin B \cos C - \cos B \sin C)$$

(加法定理より、 $\sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ を用いています。)

$$=k\{\sin B(1 - \cos C) + \sin C(1 - \cos B)\}$$

($\sin B, \sin C$ でくくりました。)

ここで、 $0 < B, C < \pi$ より、

$$k > 0, \sin B > 0, \sin C > 0, 1 - \cos B > 0, 1 - \cos C > 0$$

であるから、

$$b+c-a > 0$$

$$a < b+c \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が示された。

次に、 $|b-c| < a$ を示す。

これを示すには、 $-a < b-c$ すなわち、 $c < a+b$

$$b-c < a \quad \text{すなわち、} \quad b < c+a$$

の二つを示せばよい。

この二つの方程式は①を示したのと同様に示せる (対称性より、別の文字で同じことをするだけ) ので、

$$|b-c| < a \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が示された。

よって①、②より題意が示された。

赤字で示したところがポイントです。