

医学部予備校ACE Academy 確認テスト

数3 標準問題精講 (例題) ②

17 次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。ただし、(2)では $b > 0$ とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1+ax)}{x^2} = b \quad (\text{工学院大})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 2x) = 3 \quad (\text{名城大})$$

20

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

1 より大きい自然数 n に対して、曲線 $y = x^n$ を C とする。 x 軸上の正の部分に点 P をとり、 P を通って x 軸に直交する直線が曲線 C と交わる点を Q 、 Q における C の接線が x 軸と交わる点を R 、 R を通って x 軸に直交する直線が C と交わる点を S 、 S における C の接線が x 軸と交わる点を T とする。

(1) P の座標を $(a, 0)$ とするとき、 R の座標を a を用いて表せ。

(2) $a_n = \frac{\triangle PQR \text{ の面積}}{\triangle RST \text{ の面積}}$ とおくと、 a_n の値を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。 (東京電機大)

40

次の各不等式を証明せよ。

$$(1) \log x < \sqrt{x} \quad (x > 0) \quad (\text{お茶の水女大})$$

$$(2) 3x < 2 \sin x + \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{筑波大})$$

$$(3) \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{武蔵工大})$$

$$(4) x \log x \geq (x-1) \log(x+1) \quad (x \geq 1) \quad (\text{熊本大})$$

46 不等式 $1 - \alpha x^2 \leq \cos x$ が任意の実数 x に対して成り立つような定数 α の範囲を求めよ. (早大)

47 関数 $f(x) = x^2 - 2$ で示される曲線上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とする ($n = 1, 2, \dots$). このようにして得られる数列 $\{x_n\}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, $x_1 > \sqrt{2}$ とする.

- (1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ.
- (2) $x_n > \sqrt{2}$ であることを示せ.
- (3) 数列 $\{x_n\}$ は $\sqrt{2}$ に収束することを示せ. (和歌山県医大)

71 O を原点とし, 点 A の座標を $(1, 1)$ とする. 放物線 $y = x^2$ のグラフと線分 OA で囲まれた部分を, 線分 OA のまわりに回転させて得られる回転体の体積を求めよ. (東京女大)

88 a を正の実数とし, n を正の整数とする.

- (1) $\frac{na}{\pi}$ をこえない最大の整数を m とするとき, 次の不等式を証明せよ.

$$2m \leq \int_0^{na} |\sin x| dx < 2(m+1)$$

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a |\sin nx| dx$ を求めよ. (東北大)

95 複素数 $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ に対して, $|z^n| = \frac{1}{16}$ となる整数 n の値を求めよ. また, そのとき z^n を求めよ. (大阪工大)