

Q.(基礎問題精講 2B 例題 123)

漸化式の問題はどう解いたらよいか、解説の補助をお願いします。

A. 基本的に数列の一般項は等差数列か、等比数列か出ないと出すことはできません。

ところが、与えられた漸化式、 $a_{n+1}=3a_n+2$ のような、 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型の漸化式において、 a_n は等差数列でも等比数列でもないで、このままでは一般項を出すことはできません。そこで、一般項を出すために無理やり等比数列を作り出しています。具体的には、 $a_{n+1}=pa_n+q$ を

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$
 と変形します。

上式において、この問題では左辺が b_{n+1} 、右辺が pb_n すなわち

$$b_{n+1}=pb_n$$

となっていて、等比数列 b_n を作り出しています。この b_n を求めることで a_n を求めようという方針です。

(1)

$b_n=a_n-\alpha$ より、

$a_n=b_n+\alpha$ 、 $a_{n+1}=b_{n+1}+\alpha$ であるから、これらを $a_{n+1}=3a_n+2$ に代入して (b_n, b_{n+1} だけの式にするため)

$$b_{n+1}+3\alpha=3(b_n+\alpha)+2$$

これが等比数列を表す条件は

$$3\alpha+2=3\alpha+2$$

より、 $\alpha=-1$

(2)

(1)より $b_{n+1}=3b_n$ であるから、 b_n は公比 3、初項 $b_1=a_1+1=1$ の等比数列であるから、

$$b_n=3^{n-1}$$

(3)

(2)より、 $a_n=b_n-1$

$$=3^{n-1}-1$$