

Q. (基礎問題精講 2B p195 演習 127(2)(i))

解答の  $n \geq 2$  のときと書いてある下段の  $\Sigma$  の式がよく分かりません。

A.  $\Sigma$  の定義より  $n \geq 1$  のとき

$$\sum_{k=1}^n k a_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成立します。また、同様にして  $n \geq 2$  のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} k a_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成立します。

よって  $n \geq 2$  のとき、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$  より

$$\sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k = na_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成立することになります。

ここで、与えられた式より

$$\sum_{k=1}^n k a_k = n^2 a_n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が成立します。また、この式の  $n$  を  $n-1$  に変えると

$$\sum_{k=1}^{n-1} k a_k = (n-1)^2 a_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となりますので、 $\textcircled{4}\textcircled{5}$  を  $\textcircled{3}$  に代入すると

$$n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} = na_n$$

が得られます。あとはこの式を  $a_n$  について解けば、求める漸化式を得ることができます。