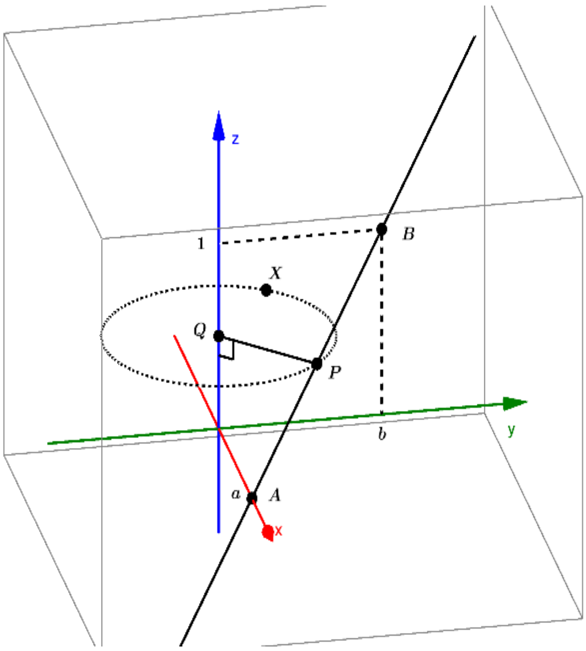
Q．（標準問題精講３　p161 標問 69）
回転体をビジュアル化する必要はないと書いてあるのですが、概形がある程度把握できないと解けないのではないでしょうか。ビジュアル化が困難な問題はどこに重点を置くべきなのか、またどこに変数を用いればいいのでしょうか。

A．
(1)については特に問題ないかと思われますので、(1)の結果を使って(2)の説明をします。
(1)より、直線ABの直線の方程式は、媒介変数tを使って

$$\begin{cases} x = a(1-t) \\ y = bt \qquad \ldots ① \\ z - t \end{cases}$$

と表せます。しかしこれはあくまで直線の方程式であるため、これをz軸の周りに回転させた時の回転体を考える必要があります。
立体をいきなり考えるのは難しいので、直線 AB 上の一点 P をz軸の周りに回転させたときの軌跡をまず考えます。問題集の解答が分かりにくいようですので、ここでは、$t = z = \frac{1}{2}$ の具体的な場合について考えてみたいと思います。このとき、点 P の座標はp$\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{2}\right)$ のとなり、点 P からz軸に下ろした垂線の足である点 Q の座標はQ$(0,0,\frac{1}{2})$となります。



点Pをz軸の周りに回転させると、上図のように明らかに円軌道をとり、この円の中心は点Q、半径はPQ となります。

この円の上にある任意の点x$(x, y, \frac{1}{2})$をとると、XQ²=PQ²となりますので、２点間の距離の公式を使って

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 \ \left(z = \frac{1}{2}\right)$$

となります。これが、点Pをz軸の周りに回転させたときの円の方程式になります。
しかしこれはあくまで$z = \frac{1}{2}$の場合ですので、$z = t$ であるような一般の場合で計算を行うと、上記計算と同様にして、点P をz軸の周りに回転させたときの円の方程式

$$x^2 + y^2 = a^2(1-t)^2 + b^2t^2 \ \ (z-t)$$

が得られます。媒介変数tを消去すると、

$$x^2 + y^2 = a^2(1-z)^2 + b^2z^2 \ \ \ldots\ldots②$$

となるので、これが回転体Mを表す方程式となります。
この回転体とyz平面が交わるのは、$x = 0$ の時なので、①に$x = 0$ を代入し、問題集通りに平方完成を行っていくと、解答

$$y^2 = (a^2+b^2)\left(z - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

が得られます。
次に、何故これが双曲線を表すかについて説明を行います。まず移項をして

$$y^2 - (a^2+b^2)\left(z - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

両辺 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ で割ると

$$\frac{y^2}{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} - \frac{\left(z - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2}{\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}} = 1$$

となりますので、これは双曲線の方程式を表していることが分かります。
(2)の回転体Mの断面さえ分かれば、回転体の体積は積分を使って簡単に求めることができるのではないかと思います。
ご質問の内容にもありましたが、この問題で、直線ABが与えられたときに、それを頭のなかで回転させて回転体Mを想像できるような人はほとんどいないのではないかと思います。また、それゆえに(2)のような体積を求めるために必要となる途中過程の誘導が付いていることになります。(2)の結果さえ分かれば回転体Mを簡単に想像（ビジュアル化）できるようになります。
立体を数学で扱う際に気をつけるべき点は、立体を３次元的に想像することには限界があるので、図形を表す方程式の助けを借りて立体を解析し、断面などを調べることで、最終的に立体が頭のなかで想像できるようになるということです。はじめから立体が想像できており、それを使って数式などを作っていくのではありません。逆で、数式を作って調べることによって、立体が想像(ビジュアル化)できるようになるのです。