Q．（標準問題精講数学 2B P93 例題 40）
解説の補助をお願いします。

A．まず前置きとして、2 次方程式が 2 つの直線を表すというのはどういうことか説明します。直線の方程式は 1 次式であり、よく$y = ax + b$という形で表します。この表し方は標準形と呼ばれます。しかし、他にも$ax + by + c = 0$の形で表されることもあり、この表し方は一般形と呼ばれます。この一般形を用いて 2 つの直線$l_1, l_2$を表すと、

$$l_1：a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad —①$$
$$l_2：a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad —②$$

となります。この 2 つの式をかけると、

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \qquad —(*)$$

です。この方程式$(*)$の解は、

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
または
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

となるので、2 つの直線$l_1, l_2$を表せたことになっています。$(*)$式は(1 次式)×(1 次式)なので 2 次式となっています。これが 2 次方程式で 2 つの直線を表すということです。

テキストの解答は少しひらめきを要する解法を紹介していますが、この解説ではあまりひらめきを必要としない、オーソドックスな解法を紹介しています(テキストの別解 1 と同じ考え方を用いています)。それは**問題に与えられた条件を使いながら、$(*)$式の係数を、与えられた方程式の係数と比較して$p, q$の値を決定する**という解法です。変数が多いので、効率よく文字を消去していきます。
まず「$(x, y) = (1,1)$を通る 2 つの直線」という条件があるので、**①、②式はそれぞれ$(x, y) = (1, 1)$で成立します**。そこで①、②にそれぞれ$(x, y) = (1,1)$を代入すると

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0$$
$$a_2 + b_2 + c_2 = 0$$

これより

$$c_1 = -(a_1 + b_1)$$
$$c_2 = -(a_2 + b_2)$$

として$c_1, c_2$を消去できます。これを$(*)$に代入して

$$\{a_1x + b_1y - (a_1 + b_1)\}\{a_2x + b_2y - (a_2 + b_2)\} = 0$$

これと与えられた 2 次方程式との係数を比較するため、上の式の左辺を展開します。登場する項は$x^2, xy, y^2, x, y,$定数の 6 つで、それぞれ効率よく展開していきます。

$\boxed{x^2\text{の項}}$

$$\{a_1x+b_1y-(a_1+b_1)\}\{a_2x+b_2y-(a_2+b_2)\}=0$$

黄色部分どうしをかけると$x^2$の項となります。このとき、$x^2$の係数は$\boldsymbol{a_1a_2}$です。

$\boxed{xy\text{の項}}$

$$\{a_1x+b_1y-(a_1+b_1)\}\{a_2x+b_2y-(a_2+b_2)\}=0$$

黄色部分どうしと緑色部分どうしをかけるとそれぞれ$xy$の項となります。このとき、$xy$の係数は$\boldsymbol{a_1b_2}$+$\boldsymbol{a_2b_1}$です。

$\boxed{y^2\text{の項}}$

$$\{a_1x+b_1y-(a_1+b_1)\}\{a_2x+b_2y-(a_2+b_2)\}=0$$

黄色部分どうしをかけると$y^2$の項となります。このとき、$y^2$の係数は$\boldsymbol{b_1b_2}$です。

$\boxed{x\text{の項}}$

$$\{a_1x+b_1y-(a_1+b_1)\}\{a_2x+b_2y-(a_2+b_2)\}=0$$

黄色部分どうしと緑色部分どうしをかけるとそれぞれ$x$の項となります。このとき、$x$の係数は$-a_1(a_2+b_2)$ $-a_2(a_1+b_1)$=$-(\boldsymbol{2a_1a_2+a_1b_2+a_2b_1})$です。

$\boxed{y\text{の項}}$

$$\{a_1x+b_1y-(a_1+b_1)\}\{a_2x+b_2y-(a_2+b_2)\}=0$$

黄色部分どうしと緑色部分どうしをかけるとそれぞれ$y$の項となります。このとき、$y$の係数は$-b_1(a_2+b_2)$ $-b_2(a_1+b_1)$=$-(\boldsymbol{2b_1b_2+a_1b_2+a_2b_1})$です。

$\boxed{\text{定数項}}$

$$\{a_1x+b_1y-(a_1+b_1)\}\{a_2x+b_2y-(a_2+b_2)\}=0$$

黄色部分どうしをかけると定数項となります。このとき、定数項は$(a_1+b_1)(a_2+b_2)$=$\boldsymbol{a_1a_2+a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2}$です。

したがって各項について、与えられた方程式$2x^2+3xy+py^2-7x+qy+3=0$と係数比較をすると

$x^2$ ： $a_1a_2=2$ —①
$xy$ ： $a_1b_2+a_2b_1=3$ —②
$y^2$ ： $b_1b_2=p$ —③
$x$ ： $-(2a_1a_2+a_1b_2+a_2b_1)=-7$ —④
$y$ ： $-(2b_1b_2+a_1b_2+a_2b_1)=q$ —⑤
定数 ： $a_1a_2+a_1b_2+b_2b_1+b_1b_2=3$ —⑥

未知数は6つ$(a_1, a_2, b_1, b_2, p, q)$あるのに対し、立式した方程式は6つあるので、この連立方程式を解くことができます。ただし方程式をよく見ると、$a_1a_2(=①)$，$a_1b_2 + a_2b_1(=②)$, $b_1b_2(=③)$の3つの形しか現れていません。この問題では$p, q$だけ分かればよいので、$a_1, a_2, b_1, b_2$ 4つを全て特定するよりも、**①、②、③の形を崩さずに方程式を解く**とよいです。

④について

$-(2a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1) = 7$

$\Leftrightarrow -(2 \times ① + ②) = -7$

$\Leftrightarrow -(2 \times 2 + 3) = -7$

$\Leftrightarrow -7 = -7$

となって、解は得られませんでしたが、方程式は成立していることが確認できました。

⑤について

$-(2b_1b_2 + a_1b_2 + a_2b_1) = q$

$\Leftrightarrow -(2 \times ③ + ②) = q$

$\Leftrightarrow -(2 \times p + 3) = q$

$\Leftrightarrow -(2p + 3) = q$ ―⑦

⑥について

$a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 = 3$

$\Leftrightarrow ① + ② + ③ = 3$

$\Leftrightarrow 2 + 3 + p = 3$

$\Leftrightarrow p = -2$ ―⑧

⑧を⑦に代入して

$-\{2(-2) + 3\} = q$

$\Leftrightarrow q = 1$

これにより、与えられた方程式の未知数$p, q$を特定できたので、答えは

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x + y + 3 = 0$$

このように係数比較では未知数の多い連立方程式を解く場合があります。むやみに全て展開したり、文字をばらしたりせずに効率よく変形していくことを心がけましょう。