Q．（標準問題精講 3 p161 標問 69(2)）
答の双曲線を図示するまでの式の変形を詳しく教えてください。

A．X=0 を代入した次の式から説明します。

$y^2=(a^2+b^2)z^2-2a^2z+a^2$　　前二つを(a^2+b^2)でくくって

$=(a^2+b^2)\left\{z^2-2\frac{a^2}{a^2+b^2}z\right\}+a^2$　｛ ｝の中を z について平方完成して

$$=(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2-(a^2+b^2)\left\{\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2+a^2$$

$$=(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2-\frac{(a^2)^2}{(a^2+b^2)}+a^2$$

$$=(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2+a^2\left\{-\frac{a^2}{(a^2+b^2)}+1\right\}$$

$$=(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2+a^2\left\{\frac{-a^2+(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}\right\}$$

$$=(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2+a^2\left\{\frac{b^2}{(a^2+b^2)}\right\}$$

$$=(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2+\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$

これは、横軸 y 、縦軸 z の双曲線　$y^2=(a^2+b^2)z^2+\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$　を、z 軸方向に$\frac{a^2}{a^2+b^2}$だけ平行移動させたものです。

y 方向には平行移動しないので、頂点は$(\mathrm{y,z})=(0,\frac{a^2}{a^2+b^2})$となります。

また、解説の図にも示されているとおり、z に 1 を代入すると y は±b となります。同様にして z=0 のとき y=±a になります。

また、漸近線についてですが

$y^2=(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2+\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$ を標準形に直すと

$$y^2-(a^2+b^2)\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$

$$\frac{y^2}{(a^2+b^2)}-\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\frac{y^2}{\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}}-\frac{\left\{z-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}^2}{\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}=1$$

かなり煩雑な形になってしまいます。
ここから漸近線を求めることはできますが、解説にも明記されていませんしやる必要はあまりないと思います。
※解説に(b,1)を通る長方形の点線が引いてありますが、これは漸近線の補助線ではなく双曲線が通る点のしるしです。

双曲線を図示するために漸近線は必要ですが、この問題に限っては頂点や双曲線が通る点を示して概形が書けていれば大丈夫だと思います。
逆に、漸近線が使いにくいので(±a,0),(±b,1)のような代表点を示しているのだと思います。