Q.（基礎問題精講 2B P180 例題 118）
解説の補助をお願いします。

A.　数列の和を求めるときには、まず**一般項(第n項)をnを使って表し、Σ の公式を適用して和を求めます**。

Σの計算を使うときには**Σの性質を利用して変形する**ことが重要です。a_k, b_kをkを含む式、cを定数とすると、以下のような性質があります。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$　← 定数倍は$\sum$の外に出すことができます。

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$　← cをn回足すということなので、cをn倍するのと同じです。

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$　← 足し算は分けることができます。

これらを上手く駆使して変形しましょう。

本問の数列の第n項は 1 から$2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}$と2の累乗を足し合わせた値となっています。したがって与えられた数列を$\{a_n\}$とすると、

$a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$
$\quad = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$

これは 2 の 0 乗から 2 の$n-1$乗までの和です。これは**等比数列の和に一致します。**等比数列の和の公式は

$$\frac{(\text{初項}) \times \{1 - (\text{公比})^{(\text{項の数})}\}}{1 - (\text{公比})}$$

だったことを思い出してください。いま、公比は2、初項は2^0、項の数はn個なので、

$$a_n = \frac{2^0(1 - 2^n)}{1 - 2} = \frac{1(1 - 2^n)}{-1} = 2^n - 1$$

となります。

この数列の初項から第n項までの和をS_nとすると、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(2^k - 1\right)$$

ここからはΣの性質を利用しながら変形します。

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1$$ ← 足し算は分けることができます(③)。

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - \sum_{k=1}^{n} 1$$ ← ∑の累乗の公式(= 等比数列の和の公式)を利用

$\sum_{k=1}^{n} 1$ は**1を$\boldsymbol{n}$回足すということなので** nとなります(②)。したがって

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n$$

$$-2(1-2^n) - n = 2^{n+1} - n - 2$$

まずは与えられた数列の**法則性を見つけ**、一般項を決定します(本問では、等比数列の和という法則がありました)。その後は**Σの公式を利用して**数列の和を求めます。