

Q. (基礎問題精講 2B p296 演習 131-3(3))

別解のやり方について、解説の補助をお願いします。

A. a_1 から a_n までの中で、二つが 1 で、残りすべてが 0 のときを考えればよいですね。そこで別解では (2) が (3) の誘導になっていると考え、(2) の結果を用いるために、 j (j は $1 \leq j \leq n$ を満たす整数) を固定して、考える。すると、 a_1 から a_n までの間に a_j を除いて考えると、一つが 1 で残りは 0 という (2) とほぼ同じ条件になる。

いま、(2) とに、1 から n までの整数の中から、 $a_k=1$ となる k を選ぶことを考えると、 S_n の要素として 2^{j-1} と 2^{k-1} (k は 1 から n までの j 以外の整数) が考えられる。

したがって、 S_n の要素の和は (2) より、 $(2^n-1)-1*2^{j-1}$ と求まる。

ここで、 $1*2^{j-1}$ を引いたのは、 $k=j$ となってしまう場合を除いたからである。

ただ、 S_n の要素の和としてはまだ十分ではなく、 2^{j-1} は 2^{k-1} の種類の数 (すなわち取りうる k の値の種類の数) の $n-1$ 回だけ S_n の要素の和を求める過程で、足し合わせられることになるので、 $(2^n-1)-1*2^{j-1}$ に $(n-1)2^{j-1}$ を足して、 S_n の要素の和は $(2^n-1)-1*2^{j-1}+(n-1)2^{j-1}$ と求まる。

あとは固定していた j を 1 から n の範囲まで動かすと、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (2^n - 1) - 1 * 2^j - 1 + (n - 1)2^j - 1 \\ &= 2(n-1)(2^n-1) \end{aligned}$$

(3) の別解ではない解答では k と j との大小関係を考えているが、別解の解答では考えていないので、上の値は同じものを二倍重複して数えているので、上の値を 2 で割って答えは

$(n-1)(2^n-1)$ と求まる。